1. Motivación

En el seminario que desarrollamos en primavera, en el que introducimos los símbolos modulares sobreconvergentes, vimos qué eran los números de Bernoulli y algunas de las congruencias que satisfacían. De esta manera, usando la definición

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{X^k}{k!},$$

vimos que $B_0 = 1, B_1 = -1/2$ y que $B_{2k+1} = 0$ para $k \geq 1$. Se comentó también que se cumplía la congruencia de Kummer: si $2k \equiv 2l \pmod{p^a(p-1)}$ y $2k$ no es 0 módulo $p-1$ entonces

$$(1 - p^{2k-1})\frac{B_{2k}}{2k} \equiv (1 - p^{2l-1})\frac{B_{2l}}{2l} \pmod{p^{a+1}}.$$

Consideremos ahora para $k \geq 1$ la serie de Eisenstein holomorfa de peso $2k$, que en términos de su q-expansión viene dada por

$$G_{2k}(q) = \frac{-B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

donde como es habitual $\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$. Notamos que si no fuese por los d que son múltiplos de p, podríamos observar cierta continuidad p-ádica gracias a lo siguiente: si $k \equiv k' \pmod{p^a(p-1)}$ y d no es múltiplo de p,

$$d^k \equiv d^{k'} \pmod{p^{a+1}}.$$

Lo que observó Serre es que definiendo

$$G^*_{2k}(q) = G_{2k}(q) - p^{2k-1} G_{2k}(q^p)$$

se tiene que

$$G^*_{2k}(q) = (1 - p^{2k-1})\Big(\frac{-B_{2k}}{4k}\Big) + \sum_{n \geq 1} \sigma^*_{k-1}(n) q^n,$$

donde ahora la suma de $\sigma^*_{k-1}(n)$ es sobre los divisores de n no múltiplos de p. Esto nos permite concluir lo siguiente:

Proposición 1. *Si $2k \equiv 2l \pmod{p^a(p-1)}$ y el valor de la congruencia no es 0, entonces*

$$G^*_{2k}(q) \equiv G^*_{2l}(q) \pmod{p^{a+1}}.$$

Esta continuidad p-ádica que observamos aquí para las series de Eisenstein nos gustaría buscarla también para el caso cuspidal, es decir, encontrar una familia de autoformas que interpolase a nuestra autoforma cuspidal dada y que cumpliese además ciertas propiedades de continuidad. Este es el objetivo de la teoría de Hida o de las formas Λ-ádicas.

De cara a cumplir nuestros propóstiso introducimos un espacio de pesos p-ádico

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{Z}_p^*).$$

Los enteros se pueden meter dentro a través de la aplicación $x \mapsto x^k$ o más comúnmente $x \mapsto x^{k-2}$, y tienen una imagen densa dotando a este espacio de la topología de la convergencia uniforme. Un peso $k \in \mathfrak{X}$ se dice par si $(-1)^k = 1$. Serre definió una familia de series de Eisenstein p-ádicas $G_k^*(q)$ para cada $k \in \mathfrak{X}$ de la siguiente manera: sea (k_i) una sucesión de enteros positivos pares que converge a ∞ en el sentido arquimediano y a k en espacio de pesos (por ejemplo, si k es un entero par y p es impar, nos sirve $k_i = k + p^i(p-1)$). Entonces

$$G_k^*(q) = \lim_i G_{k_i}(q)$$

es un conjunto que coincide con la definición anterior.

Definición 1. *Una forma modular p-ádica de Serre es una serie formal $f(q) \in \mathbb{Q}_p[[q]]$ tal que existe una sucesión (f_n) de formas modulares en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con coeficientes de Fourier racionales tal que $v_p(f - f_n)$ tiende a cero a medida que n tiende a infinito.*

2. Un primer acercamiento a las familias de Hida

Sea N un entero positivo y p un primo impar que divide exactamente a N; tenemos entonces que

$$\mathfrak{X} \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p,$$

(visto como homeomorfismo de grupos topológicos), simplemente pensando que el generador puede ir a cualquiera de los elementos no cero del cuerpo residual y que luego se toma un levantamiento de ese elemento. Si $U \subset \mathfrak{X}$ es un abierto, $A(U)$ denotará el conjunto de funciones analíticas en U, que en cada una de las intersecciones $U \cap (\{a\} \times \mathbb{Z}_p)$ se puede ver como una serie de potencias. Asumiremos por ello que U está contenido en el disco residual del 2 y que $A(U)$ es simplemente el anillo de series de potencias que convergen en un abierto de $\mathbb{Z}_p$.

Definición 2. *Una familia de Hida es una q-expansión formal*

$$f_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

tal que existe un entorno U de $2 \in \mathfrak{X}$ tal que $a_n \in A(U)$ para todo n y tal que si $k \in U \cap \mathbb{Z}^{\geq 2}$ la especialización de peso k, f_k, es una autoforma ordinaria normalizada de peso k en $\Gamma_0(N)$.
Los pesos en $\mathbb{Z}^{\geq 2} \subset \mathfrak{X}$ se llaman clásicos.

Definición 3. *Sea N un entero positivo y p un primo que divide a N. Una autoforma $f \in M_k(\Gamma_0(N))$ se dice ordinaria en p si $U_p f = \lambda_p f$ para $\lambda_p \in \mathbb{Z}_p^*$. Denotaremos por $M_k(\Gamma_0(N))^{\mathrm{ord}}$ es subespacio generado por las formas p-ordinarias.*

Teorema 1. *Sea $k \geq 2$ un entero y $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ una autoforma. Sea p un divisor primo de N tal que f es ordinaria en p. Entonces existe una única familia de Hida f_∞ que se espacializa a f en peso k.*

3. Formas Λ-ádicas

Usando las notaciones habituales, para un primo p escribimos $q = p$ si p es impar y $q = 4$ si $p = 2$. ω denotará el carácter de Teichmüller módulo q, esto es, para $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ definimos $\omega(a)$ como la única raíz de la unida en $\mathbb{Z}_p^*$ congruente con a módulo q. Denotaremos de aquí en adelante $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[X]]$ al álgebra de Iwasawa, y

$u = 1 + q$.
Un carácter de Dirichlet ψ es dice que es del primer tipo con respecto a p si $f_\psi = Mq$ o M, con $(M, p) = 1$ (usamos f_ψ para el conductor); por su parte, es del segundo tipo si $f_\psi = qp^e$ para algún entero $e \geq 1$. El conductor es o bien coprimo con p o en otro caso $q|f_\chi$ (i.e., nunca es dos). De aquí, o bien $f_\chi = M$ o $f_\chi = Mqp^r$, con $(M, p) = 1$ y $r \geq 0$. La aplicación

$$\alpha \pmod{Mqp^r} \mapsto (\alpha \pmod{Mq}, \alpha \pmod{1 + qp^r\mathbb{Z}_p})$$

da un isomorfismo entre

$$(\mathbb{Z}/Mqp^r)^* \cong (\mathbb{Z}/Mq\mathbb{Z})^* \times (1 + q\mathbb{Z}_p)/(1 + qp^r\mathbb{Z}_p).$$

Esto da lugar a dos carácteres diferentes que denotaremos χ_F y χ_S, de forma que $\chi_F\chi_S = \chi$:

$$\chi_F : (\mathbb{Z}/Mq\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Q}^*} \qquad \chi_S : (1 + q\mathbb{Z})/(1 + qp^r\mathbb{Z}) \to \overline{\mathbb{Q}^*}.$$

Vamos a introducir ahora las aplicaciones de especialización; dado un carácter

$$\chi : (\mathbb{Z}/Nqp^r\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$$

y un entero $k > 1$ la especializacion $\nu_{k,\chi} : \Lambda \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ consiste en

$$X \mapsto \zeta_\chi u^k - 1,$$

donde $\zeta_\chi = \chi_S(u)$.

Lema 1. *La aplicación $\nu_{k,\chi}$ está bien definida.*

Demostración. Sea $(\pi) = \mathfrak{p}$ el ideal primo de O. Como $\zeta_\chi \in O$, la extensión finita en la que podemos definir el carácter tenemos que

$$\zeta_\chi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \pi^n,$$

donde los c_n están en el cuerpo residual (finito). Ahora bien, los elementos de $O/\mathfrak{p}$ tienen orden coprimo con p, pero estamos diciendo que ζ_χ tiene como orden una potencia de p; esto fuerza que $c_0 = 1$. Como $u^k \equiv 1 \pmod{q}$, sucede entonces que $|\zeta_\chi u^k - 1|_p < 1$ para todos los enteros $k > 1$. Por tanto, la evaluación en cualquier elemento de Λ de $\zeta_\chi u^k - 1$ da lugar a una serie de potencias en O que converge p-ádicamente. $\square$

Como Λ no tiene divisores de cero, el núcleo de la aplicación de especialización $\nu_{k,\chi}$ es un ideal primo de Λ; esta aplicación se puede ver como una inyección de $\Lambda/\ker(\nu_{k,\chi})$ en $\overline{\mathbb{Q}_p}$. En [ZS] se puede ver lo que ya esbozamos el cuatrimestre anterior, que si I es una Λ-álgebra finitamente generada e íntegra sobre Λ, entonces es un anillo completo, local y noetheriano con dimensión de Krull 2. Para extensión nuestra aplicación de valuación de $\nu_{k,\chi}$ a I, por ser I integral, existe un primo P de I tal que $P \cap \Lambda = \ker(\nu_{k,\chi})$ (lo demostramos al final). Entonces, I/P es una extensión de $\Lambda/\ker(\nu_{k,\chi})$, que además será finita (por ser I finitamente generado como Λ-módulo). Por consiguiente, a través de la aplicación de evaluación, identificamos $\Lambda/\ker(\nu_{k,\chi}$ con O, y I/P con una extensión finita de O. De esta manera, tenemos una aplicación de especialización $\nu : I/P \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ que extiende $\nu_{k,\chi}$, y que depende de la elección de P. Así pues, para cada entero $k > 1$

podemos considerar $A_k(\chi; I)$, el conjunto de homomorfismos de O-álgebras de I a $\overline{\mathbb{Q}_p}$ que inducen la aplicación de especialización en Λ. Pondremos

$$A(\chi, I) = \cup_{k=1}^{\infty} A_k(\chi, I),$$

y los llaramemos puntos aritméticos.

Proposición 2. *Sea R/S una extensión integral de anillos y P un primo de R. Entonces, hay un primo Q de S tal que $Q \cap R = P$.*

Demostración. Comencemos con el caso R local. Si Q es un maximal de S, entonces $Q \cap R$ es maximal (esto es porque las extensiones enteras se comportan bien: R/P es cuerpo si y solo si S/Q es cuerpo ya que ambos cocientes son dominios) y por tanto es P.
En general, sea $T = R \backslash P$. Como las localizaciones conmutan con la inclusión de R en S, notemos que S_T es integral sobre R_T. Si Q' es un maximal de S_T, $Q' \cap R_T$ es PR_T. Por la conmutatividad, si f y g son las localizaciones en R y S respectivamente, $f^{-1}(Q' \cap R_T) = g^{-1}(Q') \cap R$. Si $Q = g^{-1}(Q')$, entonces $f^{-1}(PR_T) = Q \cap R$. Pero $f^{-1}(PR_T) = P$ y hemos acabado. $\square$

Definición 4. *Sea N un entero positivo coprimo con p y K una extensión finita del cuerpo cociente de Λ; sea I la clausura íntegra de Λ en K. Para cada carácter de Dirichlet $\chi : (\mathbb{Z}/Nqp^r\mathbb{Z})^* \to \bar{\mathbb{Q}}^*$ (con $r \geq 0$), una forma modular Λ-ádica F de carácter χ y nivel Nqp^r es una q-expansión formal*

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F)(X) q^n \in I[[q]],$$

de forma que para todo $k > 1$ entero (salvo un número finito),

$$\nu(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(a_n(F)) q^n \in M_k(Nqp^r, \chi\omega{-}k; \overline{\mathbb{Q}_p}),$$

para todo $\nu \in A_k(\chi, I)$.
Un forma Λ-ádica cuspidal se define de forma análoga, al igual que el concepto de forma ordinaria.

Proposición 3. *Si $\alpha, \beta \in O$ con $|\alpha|_p = 1$ y $|\beta|_p < 1$, la aplicación inducida por $X \mapsto \alpha X + \beta$ es un automorfismo del anillo $O[[X]]$.*

Demostración. Sea $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in O[[X]]$; entonces,

$$F(\alpha X + \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} \alpha^n \beta^{m-n} \Big) X^n.$$

Pero como

$$\sum_{m=n}^{\infty} \Big| a_m \binom{m}{n} \alpha^n \beta^{m-n} \Big|_p \leq \sum_{m=n}^{\infty} |\beta|_p^{m-n},$$

y dado que $|\beta|_p < 1$, la suma converg p-ádicamente.
La aplicación $X \mapsto \alpha X + \beta$ no es más que un cambio de variables, por lo que es evidente que induce un homomorfismo de anillos. Es sencillo ver que $X \mapsto \alpha^{-1} X - \alpha^{-1}\beta$. $\square$

La importancia del resultado radica que podemos cambiar la aplicación de especialización $\nu_{k,\chi}$ por cualquier entero $l \neq 0$ considerando el automorfismo de Λ $X \mapsto u^{k-l}X - (u^{k-l} - 1)$.
En los artículos de Darmon (y otros) con los que estamos trabajando paralelamente en otros seminarios, las definiciones que se dan de las formas Λ-ádicas son ligeramente distintas, pero siguiendo la misma filosofía:

Definición 5. *Sea $N_f \geq 1$ un entero y p un primo que no divide a N_f. Una familia de Hida de nivel controlado N_f es una cuaterna $(\Lambda_f, \Omega_f, \Omega_{f,\mathrm{cl}}, \mathbf{f})$ de forma que:*

1. *Λ_f es una extensión finita plana de Λ.*

2. *Ω_f es un subconjunto abierto no vacío de $X_f := \mathrm{Hom}(\Lambda_f, \mathbb{C}_p)$, y $\Omega_{f,\mathrm{cl}}$ es un conjunto de Ω_f denso cuya imagen por $\kappa : \Omega_f \to \Omega$ está en Ω_{cl} (κ es simplemente el espacio de pesos inducido por la inclusión de O-álgebras $\Lambda \subset \Lambda_f$).*

3. *$\mathbf{f} := \sum \mathbf{a_n} q^n \in \Lambda_f[[q]]$ es una serie formal con coeficientes en Λ_f tal que para $x \in \Omega_{f,\mathrm{cl}}$ la serie de potencias*

$$f_x^{(p)} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}(x) q^n$$

es la q-expansión de la p-estabilización ordinaria de un forma nueva normalizada (f_x) de peso $\kappa(x)$ en $\Gamma_1(N_f)$.

Teorema 2 (Hida)**.** *Sea f una forma nueva ordinaria en $S_k(N_f; K_f)$. Existe una familia de Hida $(\Lambda_f, \Omega_f, \Omega_{f,\mathrm{cl}}, \mathbf{f})$ de nivel controlado N_f y un punto clásico $x_0 \in \Omega_f$ de forma que $\kappa(x_0) = k$ y $f_{x_0} = f$.*

En cualquier caso, en estos contextos conviene disponer de una noción más flexible de familias p-ádicas de formas modulares, que interpolen formas modulares clásicas no necesariamente nuevas, y al mismo tiempo permitir que los coeficientes no estén necesariamente sobre una extensión finita de Λ. Por tanto, definimos una forma Λ-ádica como sigue:

Definición 6. *Una forma modular Λ-ádica de nivel controlado N es una cuaterna $(R, \Omega_\phi, \Omega_{f,\mathrm{cl}}, \phi)$ donde:*

1. *R es una extensión plana de Λ que es completa y finitamente generada (pero no tiene por qué ser finita).*

2. *Ω_ϕ es un abierto de $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{C}_p)$ y $\Omega_{\phi,\mathrm{cl}}$ es denso.*

3. *$\phi := \sum \mathbf{a_n} q^n \in R[[q]]$ es una serie formal con coeficientes en R tal que, para todo $x \in \Omega_{\phi,\mathrm{cl}}$, la serie de potencias*

$$\phi_x^{(p)} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}(x) q^n \in \mathbb{C}_p[[q]]$$

es la q-expansión de una forma cuspidal ordinaria clásica en $S_{\kappa(x)}(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p); \mathbb{C}_p) := S_{\kappa(x)}(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p); \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}_p$.

3.1. Series de Eisensein Λ-ádicas

Sea $\chi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Q}}^*$ un cáracter de Dirichlet primitivo y par ($r \geq 0$). Se comprueba que $\chi\omega^{-k}$ es primitivo para $k > 2$. Por tanto, ahí se puede considerar la serie de Eisenstein normalizada $E_{k,\chi\omega^{-k}} \in M_k(qp^r, \chi\omega^{-k}; \mathbb{Q}(\chi\omega^{-k})$ cuya q-expansión es

$$E_{k,\chi\omega^{-k}}(z) = \frac{1}{2}L(1-k), \chi\omega^{-k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi\omega^{-k}}(n)q^n.$$

Proposición 4. *Existe una forma Λ-ádica $\epsilon_\chi(X)$ tal que para todos los enteros $k > 2$,*

$$\epsilon_\chi(\zeta_\chi u^k - 1) = E_{k,\chi\omega^{-k}}.$$

Demostración. Escribimos $\psi_k = \chi\omega^k$. Para un entero $n > 0$, lo que tenemos es que construir una serie de potencias $a_n(\epsilon_\chi)(X) \in \Lambda$ tal que

$$a_n(\epsilon_\chi)(\zeta_\chi u^k - 1) = \sum_{d|n;(d,p)=1} \psi_k(d)d^{k-1},$$

para todos los enteros $k > 2$.
En el anterior seminario comentamos el hecho de que

$$(1+X)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]],$$

por lo que podemos considerar la aplicación $\phi : \mathbb{Z}_p \to 1 + q\mathbb{Z}_p$ definida como $s \mapsto u^s$. En primer lugar, es inmediato que es homomorfismo de grupos ($u^{a+b} = u^a u^b$) y además es un isomorfismo cuyo inverso envía $s \mapsto \log_u(s) := \log(s)/\log(u)$. Por tanto, $s = u^{\phi^{-1}(s)}$ para todo $s \in 1 + q\mathbb{Z}_p$.
Ahora, para un entero positivo n y un divisor suyo d que sea 1 módulo q, definimos

$$A_d(X) = \frac{1}{d}(1+X)^{\phi^{-1}(d)} \in \Lambda.$$

Además, observemos que

$$A_d(\zeta_\chi u^k - 1) = \chi_S(u)^{\phi^{-1}(d)}(u^{\phi^{-1}(d)})^k d^{-1} = \chi_S(d)d^{k-1} = \omega(d)^{-k}\chi_S(d)d^{k-1},$$

donde se ha usado que $\omega(d) = 1$. Entonces, para un entero positivo n, si cada divisor d de n con $(d,p) = 1$ tambien cumple $d \equiv 1 \mod q$, tenemos

$$\sum_{d|n;(d,p)=1} \chi_F(d)A_d(\zeta_\chi u^k - 1) = \sum_{d|n;(d,p)=1} \chi_F(d)\chi_S(d)\omega(d)^{-k}d^{k-1} = \sum_{d|n;(d,p)=1} \psi_k(d)d^{k-1},$$

tal y como queríamos.
Ahora solo hay que hacer alguna ligera modificación para cuando n tiene divisores d coprimos con p que con son 1 módulo q. Para ello, recordemos que $\langle\alpha\rangle = \omega(\alpha)^{-1}\alpha$, donde ω es el carácter de Teichmüller. Entonces, simplemente ponemos

$$a_n(\epsilon_\chi)(X) = \sum_{d|n;(d,p)=1} \frac{\chi_F(d)}{d}(1+X)^{\phi^{-1}(\langle d\rangle)} \in \Lambda,$$

y un cálculo análogo al anterior muestra que

$$a_n(\epsilon_\chi(\zeta_\chi u^k - 1) = \sum_{d|n;(d,p)=1} \psi_k(d)d^{k-1}.$$

Nos queda por último determinar una serie $a_0(\epsilon_\chi)(X) \in \Lambda$ tal que evaluada en $\zeta_\chi u^k - 1$ nos de $\frac{L(1-k,\psi_k)}{2}$.

Proposición 5. *Para todo entero $k \geq 1$ sucede que*

$$L(1-k, \psi_k) = (1 - \chi\omega^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \psi_k) = L_p(1-k, \chi),$$

donde $L_p(s, \chi)$ es la función L p-ádica, que es meromorfa (y analítica si $\chi \neq 1$) en

$$\{s \in \mathbb{C}_p \mid |s| < qp^{-1/(p-1)}.$$

Proposición 6. *Existe una serie de potencias $F_\chi(X) \in 2\Lambda$ tal que*

$$L_p(s, \chi) = F_\chi(\zeta_\chi u^s - 1).$$

Sabemos que la aplicación $X \mapsto u^{1-2k}X + (u^{1-2k} - 1)$ es un automorfismo de Λ; si H es la imagen de F_χ bajo el automorfismo entonces

$$H(\zeta_\chi u^k - 1) = F_\chi(u^{1-2k}(\zeta_\chi u^k - 1) + (u^{1-2k} - 1)) = F_\chi(\zeta_\chi u^{1-k} - 1) = L_p(1-k, \chi).$$

Por tanto, ponemos $a_0(\epsilon_\chi)(X) = H(X)/2 \in \Lambda$. □

En realidad, $F_\chi(X)$ es el cociente de dos series de potencias con $H_1(X) = X, H_\chi(X) = 1$ para $\chi \neq 1$, y además $X \nmid G_1(X)$. Por tanto, si $\chi = 1$, $\epsilon_1(X)$ no está en $\Lambda[[q]]$ aunque sigue interpolando la serie de Eisenstein, esto es

$$a_0(\epsilon_\chi)(X) = \frac{G_1(u^{1-2k}X + (u^{1-2k} - 1))}{u^{1-2k}X + (u^{1-2k} - 1)} \notin \Lambda.$$

La construcción para $G_{k,\chi\omega^{-k}}$ es completamente análoga.

4. Operadores de Hecke y el proyector ordinario

Definición 7. *Para todos los enteros $n > 0$ y $F \in M(\chi; \Lambda)$, definimos FT_n como la q-expansión formal cuyos coeficientes vienen dados por*

$$a_m(T_n(F))(X) = \sum_{d|(m,n);(d,p)=1} (X+1)^{\phi^{-1}(\langle d \rangle)} \chi_F(d) d^{-1} a_{mn/d^2}(F)(X) \in \Lambda$$

para todo $m \geq 0$.

Definición 8. *Sea K una extensión finita del cuerpo cociente de Λ, y sea I la clausura integral de Λ en K. Diremos que $F \in M(\chi; I)$ es una autoforma de Hecke si para todo $n \geq 1$ tenemos $T_n(F) = c_n(X)F$, con $c_n(X) \in I$.*

Proposición 7. *Existe un único operador idempotente $e : M(\chi; \Lambda) \to M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda)$ que cumple*

$$(F|e)(\zeta_\chi u^k - 1) = F(\zeta_\chi u^k - 1)|e$$

para toda $F \in M(\chi; \Lambda)$ y todos los enteros $k > 1$ para los que se cumple que $F(\zeta_\chi u^k - 1) \in M_k(qp^r, \chi\omega^{-k}; \overline{\mathbb{Q}_p})$.

Demostración. Sea $F \in M(\chi; \Lambda)$ y a un entero positivo tal que

$$F(\zeta_\chi u^k - 1) \in M_k(qp^r, \chi\omega^{-k}; \overline{\mathbb{Q}_p})$$

para todo $k \geq a$. A su vez, consideremos los espacios

$$M_{a,k} = \{G \in M(\chi; \Lambda) \mid G(\zeta_\chi u^j - 1) \in M_j(qp^r, \chi\omega^{-j}; \overline{\mathbb{Q}_p}) \text{ para } a \leq j \leq k\}$$

$$M^0_{a,k} = \{G \in M_{a,k} \mid G(\zeta_\chi u^j - 1) = 0 \text{ para } a \leq j \leq k\}.$$

Observemos que $F \in M_{a,\infty} = \cap_{j=a}^{\infty} M_{a,j}$. Para $G \in M_{a,k}$ denotemos su imagen en $M_{a,k}/M^0_{a,k}$ por G_k. Para $k \geq a$, se considera la inclusión

$$M_{a,k}/M^0_{a,k} \hookrightarrow \bigoplus_{j=a}^{k} M_j(qp^r, \chi\omega^{-j}; \overline{\mathbb{Q}_p})$$

definida como

$$G_k \mapsto \bigoplus_{j=a}^{k} G(\zeta_\chi u^j - 1).$$

De aquí se tiene que $M_{a,k}/M^0_{a,k}$ es un O-módulo de rango finito (por inyectividad). Además, como tanto $M_{a,k}$ y $M^0_{a,k}$ son estables bajo la acción de T_p, sabemos que

$$e_k = \lim_{n\to\infty} T_p^{n!}$$

es un idempotente bien definido en $M_{a,k}/M^0_{a,k}$. Sin embargo, la estabilización $\nu_{j,\chi}(G|e_k)$ está bien definida para toda $G \in M_{a,k}$ y $j \in \{a, \dots, k\}$. Además, como T_p conmuta con la especialización, para toda $G \in M_{a,k}$ se tiene que

$$(G|e_k)(\zeta_\chi u^j - 1) = \lim_{n\to\infty} (GT_p^{n!})(\zeta_\chi u^j - 1) = G(\zeta_\chi u^j - 1)|e.$$

Sea ahora

$$\Omega_k = \prod_{j=a}^{k} \ker(\nu_{j,\chi}),$$

y consideremos la aplicación de $M_{a,k}/M^0_{a,k}$ a $\Lambda/\Omega_k[[q]]$ definida por

$$G_k \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(G)(X) \pmod{\Omega_k}) q^n.$$

Lo que nos gustaría es definir $F|e$ tomando el límite proyectivo coeficiente a coeficiente de la q-expansión. Por Weierstrass, cada serie de potencias en Λ tiene un número finito de ceros en el disco unidad. Por tanto, $\{\Omega_k\}_{k=a}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de ideales con $\cap_{j=a}^{\infty} \Omega_j = \{0\}$ y por tanto

$$\Lambda = \varprojlim \Lambda/\Omega_k.$$

Ahora, para $a \leq j \leq k$ consideremos

$$\pi_{k,j} : M_{a,k}/M^0_{a,k} \to M_{a,j}/M^0_{a,j},$$

y observemos que $e_j \circ \pi_{k,j} = \pi_{k,j} \circ e_k$, de donde $F_j|e_j = \pi_{k,j}(F_k|e_k)$, esto es, $F_j|e_j \equiv F_k|e_k \pmod{M^0_{a,j}}$. De aquí concluimos que

$$a_n(F|e_k) \equiv a_n(F|e_j) \pmod{\Omega_j}$$

para todo $n \geq 0$ con lo que podemos definir

$$a_n(F|e)(X) = \varprojlim (a_n(F|e_k) \pmod{\Omega_k}) \in \Lambda.$$

Tenemos que comprobar que efectivamente $F|e \in M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda)$. Para ello, observemos que $a_n(F|e) \equiv a_n(F|e_k) \pmod{\Omega_k}$ para $n \geq 0$ y $k \geq a$. Entonces

$$a_n(F|e)(\zeta_\chi u^j - 1) = a_n(F|e_{j+1})(\zeta_\chi u^j - 1) = a_n(F(\zeta_\chi u^j - 1)|e).$$

Por tanto $(F|e)(\zeta_\chi u^j - 1) = F(\zeta_\chi u^j - 1)|e$, lo que implica que $F|e \in M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda)$. Por último, notemos que

$$(F|e^2)(\zeta_\chi u^k - 1) - (F|e)(\zeta_\chi u^k - 1) = F(\zeta_\chi u^k - 1)|e^2 - F(\zeta_\chi u^k - 1)|e = 0.$$

Esto quiere decir que $F|e^2 - F|e \in \ker(\nu_{k,\chi})$ para todo $k \geq a$, y por lo dicho antes, ha de ser $F|e^2 = F|e$. □

5. Construyendo formas Λ-ádicas

Sea $\chi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z})^* \to O^*$ un carácter arbitrario para algun $r \geq 0$ de forma que $\chi\omega^{-k}$ es primitivo para todo k. Pongamos $\Lambda_O = O[[X]]$ y observemos que $\nu_{k,\chi}$ se extiende a Λ_O. Sean a su vez k, l enteros positivos, $k > 2$ y sea $f \in M_l(qp^r, \psi; O)$ para un carácter de Dirichlet arbitrario $\psi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z}) \to O^*$. Se tiene que $fE_{k,\chi\omega^{-k}} \in M_{k+l}(qp^r, \psi\chi\omega^{-k}; O)$. Definamos $c_n(X) \in \Lambda_O$ como

$$f\epsilon_\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(X) q^n.$$

Definición 9. *El producto de convolución de f y ϵ_χ se define como*

$$(f * \epsilon_\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u^{-l}X + (u^{-l} - 1))q^n.$$

La definición tiene sentido ya que estamos aplicando uno de los automorfismos antes descritos, al ser $|u^{-l}|_p = 1$ y $|u^{-l} - 1|_p < 1$. Además, para $k > 2$,

$$(f * \epsilon_\chi)(\zeta_\chi u^{k+l} - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u^{-l}(\zeta_\chi u^{k+l} - 1) + u^{-l} - 1)q^n =$$

$$= f\epsilon_\chi(\zeta_\chi u^k - 1) = fE_{k,\chi\omega^{-k}}.$$

Básicamente, lo que hemos visto es que si f es una forma cuspidal, entonces $f * \epsilon_\chi$ es una forma Λ_O-ádica. Vemos ahora que cualquier forma modular p-ádica (en el sentido en que se definieron en el capítulo 3) se puede levantar a una forma Λ_O-ádica.

Teorema 3. *Sea $k \geq 1$. Para toda $f \in M_k(qp^r, \chi\omega^{-k}; O)$, existe una $F \in M(\chi; \Lambda_O)$ tal que*

$$F(\zeta_\chi u^k - 1) = f.$$

Demostración. Sea $\epsilon'(X) = X\epsilon_1(X) \in \Lambda[[q]]$, de forma que

$$\epsilon'(u^k - 1) = \frac{(u^k - 1)(\zeta_p(1 - k)}{2}.$$

La función ζ p-ádica tiene un polo simple en 0 con residuo $(1 - 1/p)$. Por consiguiente,

$$\epsilon'(0) = \lim_{k\to 0} \frac{(u^k - 1)\zeta_p(1 - k)}{2} = \lim_{k\to 0} \frac{k(u^k - 1)\zeta_p(1 - k)}{2k} = \frac{\log(u)(1/p - 1)}{2} \in O^*.$$

Sea ahora
$$\epsilon(X) = \frac{2}{\log(u)(p^{-1}-1)}\epsilon'(X) \in \Lambda_O[[q]],$$
con $a_0(\epsilon) = 1$. Por tanto, para $f \in M_k(qp^r, \chi\omega^{-k}; O)$ se tiene que $f\epsilon \in \Lambda_O[[q]]$ y además en 0 recuperamos la f. Escribiendo

$$(f * \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f\epsilon)(\zeta_\chi^{-1}u^{-k}X + (\zeta_\chi^{-1}u^{-k} - 1))q^n \in \Lambda_O[[q]],$$

tenemos que la especialización correspondiente vale f como se quería. □

6. Estructuras del espacio de formas ordinarias Λ-ádicas

En esta sección, probamos un teorema de Wiles que afirma que $M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ es un Λ_O-módulo libre de rango finito. Antes de comenzar, recordemos (por ejemplo del seminario anterior), que Λ_O cumple las siguientes propiedades:

- Es un dominio de factorización única.
- Es un anillo compacto.
- Es noetheriano.
- Teorema de preparación de Weierstrass: si $f = \sum a_n X^n \in O[[X]]$ de forma que no todos los a_i están en el ideal maximal de O, entonces existe una única unidad $u \in O[[X]]$ y un polinomio $F = X^s + b_{s-1}X^{s-1} + \ldots + b_0$ (con los b_i en el maximal) de forma que $f = uF$. Si todos los coeficientes están en el maximal hay que añadir un factor π^t.

Proposición 8. *Sea $\chi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z})^* \to O^*$ un carácter arbitrario. Los Λ_O-módulos $M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ y $S^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ son finitamente generados.*

Demostración. Haremos la prueba para $M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ ya que el otro caso es análogo. En primer lugar, el módulo no tiene torsión porque es un submódulo de $\Lambda_O[[q]]$. Para ver que es finitamente generado, veremos que el rango de cualquier Λ_O-submódulo finitamente generado está acotado independientemente del submódulo. Para eso, tomemos un submódulo libre M con base $\{F_1, \ldots, F_l\}$. Han de existir necesariamente enteros $n_1, \ldots, n_l$ de forma que no haya ninguna combinación lineal de los términos en las posiones n_i que sea 0. Por tanto, sea $D(X)$ el determinante de la matriz $l \times l$ que en la posición (i, j) tiene $a_{n_i}(F_j)(X)$.
Por el teorema de preparación, existe un número finito de $\alpha \in \mathbb{C}_p$ con $|\alpha|_p < 1$ de forma que $D(\alpha) = 0$. Por tanto, existe a tal que si $k \geq a$, entonces $D(\zeta_\chi u^k - 1) \neq 0$ y $F_i(\zeta_\chi u^k - 1) \in M_k^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega^{-k}; O)$ para todo i. Tomemos $k \geq a$ y sea $F_i(\zeta_\chi u^{-1}) = f_i$. Entonces $\{f_1, \ldots, f_l\}$ es una base para un O-submódulo libre de $M_k^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega^{-k}; O)$. Por lo que sabemos de formas modulares clásicas, este rango está acotado superiormente independientemente del peso k, lo que quiere decir que l está acotado con independencia de M (por $M_2^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega^{-2}; O)$).
Sean $\{F_1, \ldots, F_t\}$ elementos linealmente independientes sobre O dentro de $M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$. De esta discusión tenemos que cada elemento de $M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ se puede expresar como una combinación lineal de los F_i con coeficientes en K (el cuerpo de fracciones). Sea $F = \sum_i \alpha_i F_i$ con $\alpha_i \in K$. Entonces, el producto de la matriz con entradas $a_{n_i}(F_j)(X)$

por el vector con componentes α_i nos da el vector con componentes $a_{n_i}(F)(X)$. De aquí está claro que $D(X)\alpha_i \in \Lambda_O$ para todo i, por lo que

$$D(X)M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O) \subset \Lambda_O F_1 + \ldots + \Lambda_O F_t.$$

Pero Λ_O es noetheriano y $D(X)M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es un submódulo de un módulo finitamente generado, con lo que $D(X)M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es finitamente generado. Como $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es Λ_O- libre de torsión, la aplicación $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O) \to D(X)M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es un isomorfismo y por tanto $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es finitamente generado. $\square$

Proposición 9. *Sea $\chi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z})^* \to O^*$ un carácter arbitrario. Los Λ_O-módulos $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ y $S^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ son libres.*

Demostración. Encontraremos una base para $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ sobre Λ_O. Como $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es finitamente generado, existe un entero positivo a tal que para todo $k \geq a$, $\nu_{k,\chi}(F) \in M_k^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega^{-k}; O)$ para toda $F \in M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. Para $k \geq a$, nótese que si $\nu_{k,\chi}(a) = 0$, entonces $P_{k,\chi} = X - (\zeta_\chi u^k - 1)$ es un factor de $a_n(F)(X)$ para todo entero $n \geq 0$. Entonces,

$$(F/P_{k,\chi})(\zeta_\chi u^j - 1) = \frac{F(\zeta_\chi u^j - 1)}{\zeta_\chi u^j - \zeta_\chi u^k} \in M_k^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega^{-k}; \overline{\mathbb{Q}_p})$$

para todo $j > k$, y entonces $F/P_{k,\chi} \in M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. Esto implica que $\ker(\nu_{k,\chi}) = P_{k,\chi}M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. Por tanto, tenemos un morfismo inyectivo de $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)/P_{k,\chi}M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ en $M_k^{\mathrm{ord}}(qp^r, \chi\omega - k; O)$; como O es un dominio de ideales principales y este último módulo es libre, cada O-submódulo suyo también, por lo que $M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)/P_{k,\chi}M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ es un O-módulo libre.
Sea $\{F_1, \ldots, F_N\} \subset M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$ tal que los F_i módulo $P_{k,\chi}$ son una base del cociente. Entonces, los F_i son linealmente independientes sobre Λ_O, porque si $\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i = 0$, con algún $\alpha_i \neq 0$, dividiendo por una potencia suficientemente alta de $P_{k,\chi}$ podemos asumir que uno de los α_i no es divisible por $P_{k,\chi}$. Entonces, reduciendo módulo $P_{k,\chi}$ obtenemos una relación lineal no trivial entre los elementos del cociente, lo cual es una contradicción. Consideremos pues

$$M = \Lambda_O F_1 + \ldots + \Lambda_O F_n.$$

Tenemos que probar que $M = M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$, y claramente se tiene que $M \subset M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. Veamos ahora la inclusión opuesta. Sea $F \in M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$; sabemos que existe una combinación lineal de los F_i, que diremos G_0 tal que $F - G_0 \in P_{k,\chi}M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. Dividiendo por $P_{k,\chi}$, nos queda que $(F - G_0)/P_{k,\chi} \in M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$, y por el mismo argumento que antes existe una combinación lineal de los F_i, que diremos G_1 tal que $(F - G_0)/P_{k,\chi} - G_1 \in P_{k,\chi}M^{\mathrm{ord}}(\chi;\Lambda_O)$. De esta manera, tenemos una sucesión $G_0, G_1, \ldots$ de elementos de M tal que

$$F \equiv \sum_{i=0}^{j} P_{k,\chi}^i G_i \pmod{P_{k,\chi}^{j+1}},$$

para todo entero $j \geq 0$. Para todo $i \geq 0$, sea

$$G_i = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k,i} F_k$$

para $\alpha_{n,j} \in \Lambda_O$. Como Λ_O es un anillo compacto,

$$\alpha_n = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{n,j} P_{k,\chi}^{j} \in \varprojlim \Lambda_O / P_{k,\chi}^{i} \Lambda_O = \Lambda_O$$

para $1 \leq n \leq N$. Por tanto,

$$G = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k F_k \in M.$$

Además, $F - G \in M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O) \subset \Lambda_O[[q]]$ es divisible por $P_{k,\chi}^{i}$ para todos los enteros positivos i, de donde $G = F$. Por consiguiente, $M = M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda_O)$ y este último es libre. $\square$

7. El álgebra de Hecke universal

Sea $\chi : (\mathbb{Z}/qp^r\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un carácter arbitrario.

Definición 10. *Las álgebras de Hecke universal $H^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda)$ y $h^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda)$ son las Λ-subálgebras de los anillos de endomorfismos $\mathrm{End}_\Lambda(M^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda))$ y $\mathrm{End}_\Lambda(S^{\mathrm{ord}}(\chi; \Lambda))$ respectivamente, generadas por los operadores de Hecke T_n. Tensorizando por A, se definen $H^{\mathrm{ord}}(\chi; A)$ y $h^{\mathrm{ord}}(\chi; A)$.*

Teorema 4. *Sea K una extensión finita del cuerpo de fracciones de Λ e I la clausura integral de Λ en K. Sea*

$$M_0^{\mathrm{ord}}(\chi; I) = \{F \in M^{\mathrm{ord}}(\chi; K) \mid a_n(F) \in I \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Entonces, para $A = I$ o K, los apareamientos

$$\langle , \rangle : H^{\mathrm{ord}}(\chi; A) \times M_0^{\mathrm{ord}}(\chi; A) \to A$$

definidos como $\langle H, F\rangle = a_1(FH) \in A$ inducen isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_A(H^{\mathrm{ord}}(\chi; A), A) \cong M_0^{\mathrm{ord}}(\chi; A),$$

$$\mathrm{Hom}_A(h^{\mathrm{ord}}(\chi; A), A) \cong S^{\mathrm{ord}}(\chi; A).$$

La demostración es exactamente la misma que en el caso clásico.