SESIONES DE PREPARACIÓN OLIMPIADA MATEMÁTICA

Óscar Rivero Salgado

Los problemas que aquí se presentan (algunos, aunque no todos, con soluciones detalladas) forman parte de la colección que se usó en las sesiones de preparación para la Olimpiada Matemática que se celebraban en la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC durante la primavera de 2017. Prácticamente todos están sacados de olimpiadas nacionales e internacionales. Estas sesiones se celebraban habitualmente los martes y jueves y contaban con la participación de alumnos de diferentes centros educativos de la provincia de Barcelona. Muchas de estas soluciones son el resultado de las discusiones conjuntas que se establecieron con ellos. Quiero aprovechar estas líneas para agradecer a los profesores José Luis Díaz Barrero y Josep Grané el confiar en mí el responsabilizarme de las clases durante ese cuatrimestre. Por último, indicar que estas soluciones se escribieron para que los estudiantes tuviesen una guía por donde repasar lo desarrollado en las sesiones, de ahí que el texto no haya sido sometido a una revisión exhaustiva y pueda haber numerosos errores, por los cuales pido disculpas de antemano. Del mismo modo, falta añadir referencias a las fuentes de donde han sido tomados los problemas.

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle BCD = 90^o$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD respectivamente, de forma que $QR \cap AB = P$ y $QR \cap AD = S$. Sabemos que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y N el punto medio de QR. Probad que los puntos M, N, A y C están sobre una misma circunferencia.
Solución. Necesitamos probar que $\angle AMC = \angle ANC$. En primer lugar, es fácil hacer ciertas observaciones. $ABCD$ es cíclico (ángulos opuestos suman 180^o) y M es el centro de la circunferencia circunscrita (BD es un diámetro). Por su parte, N es también el punto medio de PS.
$\angle ANC = \angle ANQ + \angle QNC = \angle ANQ + 2\angle QRC$, donde hemos usado que el valor del ángulo central es el doble que el del inscrito. Por su parte, $\angle ANQ = \angle ANP = 2\angle ASP$, pues nuevamente N es el centro de una circunferencia de diámetro PS que contiene a A. Así pues

$$\angle ANC = 2(\angle ASP + \angle QRC) = 2(\angle DSR + \angle DRS) = 2\angle ADC = \angle AMC,$$

que era justo lo que queríamos probar.

Problema 2. Determinad el menor entero positivo k para el cual existe una coloración de los enteros positivos (que llamaremos $\mathbb{N}$) y una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla las siguientes dos propiedades:

1. Para cualesquiera enteros positivos m, n del mismo color, $f(m+n) = f(m)+f(n)$.
2. Existen enteros positivos m, n tales que $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Solución. Este problema tiene dos partes. La primera es ver que $k = 2$ no funciona ($k = 1$ nunca podría ser porque es imposible que pasen las dos condiciones al mismo tiempo) y la segunda que $k = 3$ sí funciona.

Comenzaremos por la primera, suponiendo que tenemos dos colores, azul y rojo. Para ello, sea $f(1) = a$; veremos que $f(n) = na$ para todo n y eso servirá para ver que la segunda condición nunca se cumple. Comenzamos observando que $f(2) = f(1)+f(1) = 2a$ (tomando $m = n = 1$ en la primera condición). **Motivaremos la solución demostrando ahora que** $f(3) = 3a$, lo cual se hará por reduccion al absurdo, suponiendo que $f(3) \neq 3a$. Digamos que 1 es azul (A); si 2 fuese azul, entonces $f(3) = f(1) + f(2) = 3a$ (hemos tomado $m = 1$ y $n = 2$ en la primera condición). Por tanto 2 es rojo (R). Ahora bien, como $f(4) = f(2) + f(2) = 4a$, si 3 es azul, entonces $4a = 4f(1) = f(3) + f(1) = f(3) + a$ y por tanto $f(3) = 3a$, lo cual contradice lo que hemos supuesto. Tenemos que 3 es rojo. Si 4 tambien fuese rojo habríamos acabado, porque entonces $f(6) = f(3)+f(3) = 2f(3) \neq 6a$ y $f(6) = f(4)+f(2) = 6a$. Entonces 4 es azul. Pero eso implica que $f(5) = f(4)+f(1) = 5a$ y entonces $5a = f(5) = f(2)+f(3) = 2a+f(3)$, lo que lleva a que $3a = f(3)$, y eso no puede ser por hipótesis nuevamente. Hemos llegado a un absurdo ya que 4 no se puede colorear ni de rojo ni de azul.
Ahora, esto mismo que hemos hecho para 3 lo haremos en general. **Sea m el menor entero tal que** $f(m) \neq ma$; entonces, si $m = 2n$ sucede que $f(m) = f(2n) = f(n)+f(n) = na+na = 2na = ma$, lo que es una contradicción. Por tanto, $m = 2n+1$ (m ha de ser **impar**). Digamos que 1 es azul (A); entonces $2n$ es rojo (R) porque en caso contrario pasaría que $f(2n + 1) = f(2n) + f(1) = (2n + 1)a$. Del mismo modo, en cada pareja $(i, 2n + 1 - i)$ uno de los números es A y el otro R. Como $f(2n + 2) = f(n + 1) + f(n + 1) = (2n + 2)a$, si $2n + 1$ fuese A, entonces $(2n + 2)a = f(1) + f(2n + 1) = a + f(2n + 1)$, lo cual no puede ser, así que $2n + 1$ **es** R. Ahora veremos que cualquier impar $2k+1$ con $k < n$ ha de ser A, ya que si fuese R, $f(2n+1)+(2k+1)a = f(2n+1)+f(2k+1) = f(2(n+k+1)) = f(n+k+1)+f(n+k+1) = (2n+2k+2)a$, donde hemos usado que $n+k+1 < n+n+1 = 2n+1$. Así pues, **todos los impares menores que $2n + 1$ son A y todos los pares** R. Ahora bien, como $f(2n+2) = 2f(n+1) = (2n+2)a$, si $2n+2$ fuese R, $f(4n+2) = f(2n+2)+f(2n) = (4n + 2)a$, y al mismo tiempo $f(4n + 2) = 2f(2n + 1) \neq (4n + 2)a$. **Por tanto,** $2n + 2$ **es** A. Pero entonces, $f(2n + 3) = f(2n + 2) + f(1) = (2n + 3)a$ y por consiguiente $(2n + 3)a = f(2n + 3) = f(2n + 1) + f(2) = f(2n + 1) + 2a$, con lo que $f(2n + 1) = (2n + 1)a$, contradiciendo nuestra hipótesis y probando que $f(n) = nf(1)$ para todo n y la segunda condición nunca se cumple.
Veamos ahora que $k = 3$ **funciona**. Para ello, pintamos de azul los números 1 módulo 3; de rojo los que sean 2 módulo 3 y de verde los múltiplos de 3. Sea

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ no es múltiplo de 3} \\ 2n & \text{si } n \text{ es múltiplo de 3.} \end{cases}$$

Al sumar dos números azules o dos números rojos el resultado es rojo o azul, respectivamente, y en ambos casos $f(m+n) = f(m) + f(n) = m+n$, como se quiere; al sumar dos verdes el resultado es también verde así que $f(m+n) = f(m)+f(n) = 2(m+n)$. En cambio $f(1)+f(2) = 3$ pero $f(3) = 6$, lo cual prueba que se cumplen ambas condiciones.

Problema 4. Sea $n \geq 1$ un entero y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ enteros positivos. En un grupo de $t_n + 1$ personas se juegan partidas de ajedrez. Dos personas juegan entre sí como mucho una vez. Probad que es posible que se cumplan al mismo tiempo:

1. El número de partidas jugadas por cada persona es uno de los números $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
2. Para cada i con $1 \leq i \leq n$, hay al menos una persona que juega exactamente t_i partidas.

Solución. Este problema requiere de una doble de inducción. **En primer lugar vamos a hacer inducción en n, observamos que para $n = 1$ el enunciado es trivialmente cierto**. Simplemente hacemos que cada uno de los $t_1 + 1$ concursantes juegue con todos los demás y eso es suficiente. Supondremos ahora que el enunciado es cierto hasta $n - 1$ y lo probaremos para n.
Tenemos entonces $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, por lo que necesariamente $t_n \geq n$. **El caso $t_n = n$ es sencillo**, porque quiere decir que $t_i = i$ para todo i. Cuando $n = 2$ directamente son 3 jugadores tales que el primero juega contra los otros dos y estos no se enfrentan entre sí. En cualquier otro caso, si numeramos a los jugadores como $j_1, \ldots, j_{n+1}$ y hacemos que j_{n+1} juegue con todos y j_1 solo con j_{n+1} podemos olvidarnos de ellos y considerar una nueva situación, donde hay $n-1$ jugadores y queremos que los números de partidas jugadas estén entre $1, 2, \ldots, n - 2$, y se tomen todos los valores. Por hipótesis de inducción, simplemente consideramos que es posible un torneo con $n - 1$ jugadores dados valores $1 < 2 < \ldots < n - 2$. **Ahora, fijado n, podemos hacer inducción en el valor de t_n, considerando que es cierto para valores de $t_n < M$**. Consideremos ahora una situación donde $t_n = M$.

- **Si $t_1 > 1$ simplemente consideramos que uno de los jugadores se enfrenta a todos los otros**; una vez consideramos esto, si nos restringimos a un nuevo torneo donde participan todos los jugadores menos esos, podemos hacer que todos los números de partidas estén en $t_1 - 1 < \ldots < t_n - 1 = M - 1$ y que cada valor sea tomado al menos una vez, por hipótesis de inducción. Por tanto, en el torneo inicial solo se toman los valores $t_1 < \ldots < t_n$ y cada uno se toma al menos una vez (en particular, t_n se está tomando al menos dos veces).

- **Si $t_1 = 1$, considero un jugador que se enfrenta a todos y $t_n - t_{n-1}$ que solo juegan contra ese**. De esta manera, quedarán $t_n + 1 - (t_n - t_{n-1} + 1) = t_{n-1}$ jugadores. Ahora considero el torneo resultante de excluir a esos y quiero que el número de partidas que juegue cada jugador esté en $t_2 - 1 < \ldots < t_{n-1} - 1$ y que cada valor sea tomado al menos una vez, y de nuevo esto lo puedo hacer por hipótesis de inducción, porque tengo $n - 1$ valores y eso siempre es posible.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de enteros positivos es costosa si existe un entero positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

- Encontrad los enteros $n \geq 2$ para los que hay una n-tupla costosa.

- Probad que para todo entero positivo impar m existe un entero $n \geq 2$ tal que m está en un n-tupla costosa.

Solución. En la primera parte, el caso en el que n es impar se prueba simplemente tomando todos los números iguales a 1; en el caso par, es trivial comprobar que para $n = 2$ no es posible porque queda $(a_1 + a_2)^2$ y el lado de la derecha nunca es un cuadrado perfecto. Supongamos ahora que $n = 2l$ es par. Si para un cierto n pudiésemos fabricar una n-tupla costosa, tendríamos que o bien todos los números son pares o todos impares; si todos son pares, podemos sacar 2 como factor común en cada paréntesis y nos queda un 2^{2l} multiplicando a unos nuevos números, que forman una n-tupla costosa; iterando este proceso, podemos suponer que todos son impares. Cojamos el mayor de ellos (que por fuerza es mayor que 1 porque si todos fuesen 1 no es posible). Podemos suponer, dado que la expresión es cíclica, que a_1 es el mayor. Ahora bien, pasa que existe un r tal que $2^r < a_1 < 2^{r+1}$, y entonces

$$2^r < a_1 < a_1 + a_2 < 2^{r+1} + 2^{r+1} = 2^{r+2},$$

con lo que $a_1 + a_2 = 2^{r+1}$ y por el mismo motivo $a_n + a_1 = 2^{r+1}$; entonces $a_2 = a_n$. Por consiguiente, nos queda

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_2)(a_2 + a_1) = (a_1 + a_2)^2 (a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_2) = 2^{2k-1},$$

y poniendo $a_1 + a_2 = 2^s$, pasa que

$$(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_2) = 2^{2k-2s-1},$$

con lo que $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$ es una n-tupla costosa.
Ahora el argumento se concluye por inducción; **si para cualquier par menor o igual que $2t$ no es posible, para $2t + 2$ tampoco lo será porque de una $(2t + 2)$-tupla costosa se puede fabricar una $(2t)$-tupla**, y eso no es posible.
Para el segundo apartado, dado un entero impar $m > 1$ (el caso 1 es trivial), observamos que hay un r tal que $2^r < m < 2^{r+1}$. Entonces, $2^{r+1} - m < m$ y es posible considerar la sucesión decreciente tal que el primer término es m, después viene $2^{r+1} - m$, el siguiente término es la diferencia entre este número y la siguiente potencia de 2, y así sucesivamente. Por ejemplo, si empiezo con 21 sería $(21, 11, 5, 3, 1)$. En particular, observamos que esta sucesión siempre acaba en 1 (la única potencia de dos impar). Si denoto esta sucesión como $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, con $a_1 = m$ y $a_h = 1$, tengo que la tupla

$$(a_1, a_2, \ldots, a_h, a_h, \ldots a_2),$$

formada por $2h - 1$ números siempre funciona, porque

$$(a_1 + a_2) \cdots (a_{h-1} + a_h)(2a_h)(a_h + a_{h-1}) \cdots (a_2 + a_1) = 2[(a_1 + a_2) \cdots (a_{h-1} + a_h)]^2,$$

y dentro del corchete todos los factores son potencias de 2 por construcción. Por tanto, esta última expresión es una potencia de dos impar, como queríamos.

Recordando raíces primitivas

En ciertos momentos del curso, cuando hablábamos de teoría de números, hemos visto desfilar ante nosotros algunos resultados de carácter más teórico y de gran utilidad para abordar problemas. Uno de estos fue el de la existencia de raíces primitivas. Una raíz primitiva módulo n es un número coprimo con n, digamos g, que a través de sus sucesivas potencias $g^0, g^1, \ldots$, me permite obtener todos los números que son coprimos con n (siempre trabajando módulo n). Por ejemplo, módulo 7 lo que tengo es que $3^0 \equiv 1$, $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 2$, $3^3 \equiv 6$, $3^4 \equiv 4$ y $3^5 \equiv 5$. Decimos que $\mathrm{ord}_n(a) = k$ si k es el menor entero positivo tal que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$. Si $a^t \equiv 1 \pmod{n}$, entonces t es múltiplo del orden, y $a^t \equiv a^{t'} \pmod{n}$ si y solo si $t - t'$ es un múltiplo del orden.

Pero antes de embarcarnos en estos problemas, recordamos también otros más elementales.

Competición Matemática Mediterránea 2005. Probad que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$$

no tiene soluciones racionales.
Solución. La ecuación se puede reescribir como $(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2=7$, o alternativamente $a^2+b^2+c^2=7d^2$, donde $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Si los cuatro números tienen un factor primo en común, digamos p, tendremos que $(a/p,b/p,c/p,d/p)$ también es solución, así que podemos asumir directamente que los números son coprimos y en particular no son todos pares.
Si d es impar, podrían serlo también los otros 3 números, pero en ese caso como un impar al cuadrado es congruente a 1 módulo 8 quedaría que $3\equiv 7 \pmod 8$; si hubiese un impar y dos pares, tendríamos que $1\equiv 3 \pmod 4$. Si d es par, hay exactamente un par entre los otros 3, y considerando la ecuación módulo 4 ahora se llega a la contradicción $2\equiv 0 \pmod 4$.

Un clásico por antonomasia (vuestra primera curva elíptica). Probad que $y^2=x^3+23$ no tiene soluciones enteras.
Solución. Claramente x e y tienen distinta paridad. Si x es par, $y^2\equiv 3 \pmod 4$ y eso no es posible. Por su parte, si x es impar ha de ser también congruente con 1 módulo 4.
Reescribiendo ahora la ecuación como $y^2+4=x^3+27$, observamos que $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$, y este último factor (x^2-3x+9) es congruente con 3 módulo 4, lo que quiere decir que en su factorización aparece al menos un primo $p=4k+3$. Entonces p ha de dividir a $y^2+4=4\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2+1\right)$ y poniendo $z=y/2$, nos queda que $p|z^2+1$, o dicho de otra manera, existe un z para el cual $z^2\equiv -1 \pmod p$, y cuando p es de la forma $4k+3$ eso no puede suceder. Os recuerdo el porqué un poco más adelante.

IMO Shortlist 2006. Probad que

$$\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$$

no tiene soluciones enteras.
Solución. Para demostrar esto, nos vamos a apoyar en el siguiente resultado que luego demostraremos: $\frac{x^7-1}{x-1}$ **solo tiene factores primos de la forma** 7 **o** $7k+1$; en particular, todos sus divisores son o múltiplos de 7 o congruentes con 1 módulo 7. Ahora bien, $y^5-1=(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)$, y entonces y tendría que ser o 1 o 2 módulo 7. Si es 1, el otro factor es 5 módulo 7, mientras que si es 2 el otro es 3, así que en ningún caso es posible que ambos sean 0 o 1.
Vamos a demostrar ahora que $\frac{x^p-1}{x-1}$ solo tiene divisores primos de la forma $pk+1$ o p, procediendo por contradicción y suponiendo que q es un divisor primo de esa expresión que no es ni $pk+1$ ni p. Entonces $q|x^p-1$, con lo que $\mathrm{ord}_q(x)|p$ ya que $q|x^p-1$. Ahora bien, como $\mathrm{ord}_q(x)|(q-1)$ por el pequeño teorema de Fermat dicho orden no puede ser p, porque sabemos que q no es congruente con 1 módulo p. Entonces el orden es 1, pero en ese caso

$$q\left|\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\ldots+x+1,\right.$$

y esta última expresión es congruente con p módulo q. Así pues $p\equiv 0 \pmod q$, y eso pasaría cuando $p=q$, que estamos suponiendo que no es cierto. De esta manera, no es posible tener factores primos que no sean de la forma que hemos establecido.

Resultado “famoso”. Existen infinitos primos de la forma $an+b$, cuando a,b son coprimos. Aquí demostraremos solo que hay infinitos de la forma $pk+1$.

Para ello, supongamos que hay un número finito, $p_1, \ldots, p_r$, y sea $M = pp_1p_2 \cdots p_r$. Entonces

$$M^{p-1} + \ldots + M + 1$$

solo puede tener como divisores primos a p o a alguno de la forma $pk + 1$, es decir, a $p_1, \ldots, p_r$, pero ninguno de esos números dividirá a esa expresión ya que dividen a $M^{p-1} + \ldots + M$ pero no a 1.

Recordad que ya en su día habíamos probado que hay infinitos primos de la forma $4k+3$ (suponiendo que hay un número finito $p_1, \ldots, p_k$ y luego considerando el número resultante de sumarle o bien 2 o bien 4 a ese producto) y también de la forma $4k + 1$ (considerando ahora el doble del producto al cuadrado y sumándole 1). Para este último caso, la clave era el siguiente resultado.

Resultado "para niños". -1 es residuo cuadrático módulo un primo impar p si y solo si es de la forma $4k + 1$.
Si $p = 4k+3$ y existe z tal que $z^2 \equiv -1$, entonces pasa también que $z^{4k+2} \equiv -1$. Ahora bien, $z^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$ por el pequeño teorema de Fermat, y eso es una contradicción.
Para demostrar el recíproco podemos proceder de varias maneras:

- **Jugando.** Sea $x = 1 \cdot 2 \cdots (2k)$. Entonces,

  $$x^2 = 1{\cdot}2 \cdots (2k){\cdot}(-2k) \cdots (-2){\cdot}(-1) \equiv 1{\cdot}2 \cdots (2k)(2k{+}1) \cdots (4k{-}1){\cdot}(4k) = (4k)! \equiv -1,$$

  donde hemos usado al final el teorema de Wilson.

- **Usando la existencia de raíces primitivas.** Hay un cierto $g \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tal que el conjunto $\{g^0, g^1, \ldots, g^{4k-1}\}$ contiene a todas las clases no cero módulo p. Entonces $g^{2k} \equiv -1$, ya que $2k$ es el único número que no es cero módulo $p-1$ y tal que su doble sí es cero. Llega con ver que hay un t tal que $t^2 \equiv g^{2k}$ y simplemente nos cogemos $t = g^k$ o $t = g^{3k}$.

Algunos estudiantes preguntaron si era posible hacer problemas donde se usase de forma crucial la existencia de raíces primitivas. Para satisfacer su curiosidad, se presentaron los siguientes dos problemas.

Olimpiada Serbia 2015. En un tablero $n \times n$ ponemos en sus casillas los números $1, 2, \ldots, n^2$ en algún orden. n casillas se dice que son dispersas si no hay dos en la misma fila o columna. Un tablero se dice que es barcelonés si todos los productos de n números escritos en n casillas dispersas dan el mismo resto al dividir por $n^2 + 1$. Determinar si existen tableros barceloneses para $n = 8$ y $n = 10$.
Solución. Si hubiese un tablero barcelonés de forma que tuviésemos siempre el mismo resto módulo 65, habría de ser un múltiplo de 13 ya que hay 4 múltiplos de trece en el tablero. Por su parte, se pueden particionar las casillas en 8 grupos disjuntos de 8 casillas dispersas cada uno (tomando por ejemplo las diagonales), y no todos los grupos pueden tener múltiplos de 13, con lo que el producto para esos no será múltiplo de 13, lo cual contradice el hecho de que todos den el mismo resto.
Para $n = 10$, como 101 es primo hay una raíz primitiva g, así que ponemos $a_{i,j} \equiv g^{10i+j} \pmod{101}$. Cada número del 1 al 100 está una vez. Tomemos ahora números dispersos $a_{0,p(0)}, \ldots, a_{9,p(9)}$ y notemoes que $p(0), \ldots, p(9)$ es una permutación de $0, \ldots, 9$. Por

tanto, el producto de los números será siempre $g^{0+10+\ldots+90+0+1+\ldots+9} = g^{495}$, sin importar las casillas que hayamos tomado.

Olimpiada Iberoamericana 2016. Sea k un entero positivo y $a_1, \ldots, a_k$ unos ciertos dígitos. Probad que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son, en este orden,

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$$

para ciertos dígitos $b_1, b_2, \ldots, b_k$.
Solución. Antes de resolver el problema, vamos a demostrar que 2 **es una raíz primitiva módulo** 5^k (esto no haría falta hacerlo en una olimpiada porque es un resultado conocido). Esto se sigue directamente del resultado conocido popularmente como LTE (lifting the exponent), que podéis leer en algún fichero que os envío. Básicamente, si queremos determinar el menor natural r tal que $2^r \equiv 1 \pmod{5^k}$, nos podemos restringir a aquellos r tales que $2^r \equiv 1 \pmod 5$, es decir, $r = 4t$. Entonces, como $5|(2^4 - 1)$ pero $5 \nmid 2$, nos queda que

$$v_p(2^{4t} - 1) = v_p(2^4 - 1) + v_p(t) = 1 + v_p(t)$$

y el menor t tal que $v_p(t) = k - 1$ es 5^{k-1}. Por tanto, el orden es $4 \cdot 5^{k-1} = \phi(5^k)$.
Una vez sabemos esto el problema es mucho más fácil. Consideremos los dos menores enteros de $2k$ dígitos que empiezan por $a_1, a_2, \ldots, a_k$ que son múltiplos de 2^{2k}. Hay "suficiente espacio"para ellos dado que $2 \cdot 2^{2k} \leq 2^{3k} = 8^k < 10^k$; de estos dos números, al menos uno no será múltiplo de 5, ya que la diferencia entre ellos es 2^{2k}. Tomemos dicho número (si ninguno es múltiplo de cinco cogemos uno cualquiera) y llamémosle M.
Entonces, para $n \geq 2k$, 2^n es congruente con M módulo 2^{2k}. Además, y esta es la clave, por ser 5 una raíz primitiva, existirá un t tal que 2^t es congruente con M módulo 5^{2k} (de hecho, habrá una t así cada $\phi(5^{2k})$ números, así que si $t < 2k$ sumando repetidamente $\phi(5^{2k})$ podemos suponer que es mayor que $2k$). Así pues, 2^t es congruente con M módulo 2^{2k} y módulo 5^{2k}, y por tanto también lo será módulo 10^{2k}. Esto nos quiere decir que 2^t acaba con una secuencia de $2k$ números de los cuales los k primeros de la secuencia son $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tal y como queríamos.

Dos problemas (fáciles) de álgebra

USAMO 2014. Sean a, b, c, d números reales tales que $b - d \geq 5$ y el polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene cuatro raíces reales (que llamaremos x_1, x_2, x_3 y x_4). Encontrad el mínimo valor que puede tomar la expresión

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1).$$

Solución. En primer lugar observamos que en el caso de

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

se tiene que el valor de la expresión es 16 y se satisfacen las condiciones del enunciado. Veremos que este número siempre tiene que ser mayor o igual que 16. Para ello, observamos que

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) = (x_1+i)(x_2+i)(x_3+i)(x_4+i)(x_1-i)(x_2-i)(x_3-i)(x_4-i).$$

Ahora, nos damos cuenta de que

$$1 - ai - b + ci + d = P(i) = (x_1 - i)(x_2 - i)(x_3 - i)(x_4 - i),$$

y también de que

$$1 + ai - b - ci + d = P(-i) = (x_1 + i)(x_2 + i)(x_3 + i)(x_4 + i),$$

con lo cual si multiplicamos estas dos expresión nos sale que

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) = (1-b+d)^2+(a-c)^2 = (b-d+1)^2+(a-c)^2 \geq (5-1)^2 = 16.$$

Competición Matemática Mediterránea 2012. Probad que en un triángulo acutángulo

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{\tan^2 A}{\tan B \tan C} + \frac{\tan^2 B}{\tan C \tan A} + \frac{\tan^2 C}{\tan A \tan B}\Big) + 3\Big(\frac{1}{\tan A + \tan B + \tan C}\Big)^{2/3} \geq 2.$$

Solución. La clave para resolver este problema es observar que las tangentes de un triángulo cumplen que

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

La primera parte de la desigualdad se escribe simplemente como

$$\frac{\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C}{3 \tan A \tan B \tan C}.$$

La segunda la hemos de homogeneizar, y quedará

$$3\Big(\frac{1}{\tan A + \tan B + \tan C}\Big)^{2/3} = 3\Big(\frac{1}{\tan A \tan B \tan C}\Big)^{2/3} \cdot \Big(\frac{\tan A \tan B \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}\Big)$$

$$= 3\frac{(\tan A \tan B \tan C)^{1/3}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Aplicando ahora aritmético-geométrica para los dos sumandos, nos sale que el miembro de la izquierda en la desigualdad inicial es mayor o igual que

$$2\sqrt{\frac{\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C}{(\tan A + \tan B + \tan C)(\tan A \tan B \tan C)^{2/3}}}.$$

El resultado que queríamos probar se desprende multiplicando las siguientes dos desigualdades:

$$\sqrt[3]{\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C} \geq 3^{-2/3}(\tan A + \tan B + \tan C),$$

que se sigue de la desigualdad entre aritmética y cúbica, y

$$\sqrt[3]{(\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C)^2} \geq 3^{2/3}(\tan A \tan B \tan C)^{2/3},$$

que es cierta por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

Esto nos lleva a recordar necesariamente aquella desigualdad ya mítica de la Olimpiada de 2011 en Navarra.

OME 2011. Problema 2.
Demostrad que dados $a, b, c > 0$, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}.$$

Solución. La problemática es la misma que antes: hay dos partes en la desigualdad, una mayor o igual que $3/2$ y la otra menor o igual que 1. Tal vez el uso de medias nos permita aunar este exceso con el defecto, de manera que se "cancelen"de alguna manera.
Por la desigualdad de Bergström (o de Cauchy, o de Cauchy en forma Engel, o de Cauchy en forma Titu, el nombre es lo menos importante),

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$= 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Entonces, llega con ver que

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{3}{2},$$

pero eso se sigue directamente de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. La igualdad se da si y solo si $a = b = c$.
Ejercicio: haced el problema "a lo bruto". Dejad la raíz sola a un lado, elevad al cuadrado y aplicad Muirhead.

Un problema sobre Apolonio

El siguiente problema, de infausto recuerdo para mí, es de la IMO de 2010.

IMO 2010. Problema 4.
Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, y Γ su circuncírculo. Las líneas AP, BP y CP cortan nuevamente a ABC en los puntos K, L, M, respectivamente. La tangente al circuncírculo en C corta a la línea AB en S. Demostrad que $SC = SP$ si y solo si $MK = ML$.
Solución. Supondremos sin pérdida de generalidad que $AC < CB$. Los triángulos MPK y ACP son semejantes, con lo cual tenemos que $MK = \frac{AC}{AP} \cdot MP$; de la misma manera, como MPL es semejance a BCP, $ML = \frac{BC}{BP} \cdot MP$. Por consiguiente, $MK = ML$ si y solo si

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP},$$

es decir, si P está en el denominado círculo de Apolonio.
Vamos a determinar el lugar geométrico de los puntos que cumplen que $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}$ (esto no haría falta hacerlo en una olimpiada). Una primera observación es que C cumple esa condición, y también la cumplen T y T', los pies de las bisectrices interior y exterior, respectivamente (recordemos que estas dos bisectrices son perpendiculares). Ahora, la observación clave es que si P cumple esa condición T y T' son también (por el teorema de la bisectriz, ya que solo hay un punto en el interior del segmento y otro en el exterior

para el cual la proporción AC/BC sea igual a un número fijado) pies de las bisectrices interior y exterior del triángulo APB. Esto quiere decir que la condición necesaria y suficiente para que P cumpla lo que queremos es que $\angle TPT' = 90^{\text{o}}$, así que el lugar geométrico es la circunferencia de diámetro TT'.
Queremos ver que S es el centro, es decir, que S es la intersección de la prolongación de AB con la mediatriz de CT. Eso implicaría directamente el enunciado porque $SC = SP$ pasaría si y solo si P está en el círculo de Apolonio y ya hemos visto que la otra condición era equivalente también a la pertenencia a dicho círculo. Para ver que $SC = ST$, solo hay que comprobar que $\angle SCT = \angle STC$, pero

$$\angle SCT = \angle SCA + \angle ACT = \beta + \gamma/2 = 180^{\text{o}} - \alpha - \gamma/2 = \angle STC.$$

Un poco de cuaternas harmónicas

Vamos a considerar una línea d y tres puntos sobre ella, A, B y C. La razón simple de los tres puntos, que escribiremos $[ABC]$, se define como $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CB}}$, donde se entiende que los segmentos son orientados (y por tanto el cociente es positivo cuando C está entre A y B y negativo cuando está fuera del segumento). Si $C = A$, entonces $[ABC] = 0$ y si $C = B$ entonces $[ABC] = \infty$. Fijando un sistema de coordenadas tal que $A = (0, 0)$ y $B = (1, 0)$, existirá un único C en la recta AB tal que $[ABC] = \rho$. Esto es así porque si $C = (\lambda, 0)$, entonces

$$[ABC] = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

De aquí nos queda que $\lambda = \frac{1}{1+\frac{1}{\rho}}$ (está unívocamente determinado).

Consideremos ahora cuatro puntos sobre la recta d, A, B, C y D. Entonces,

$$\mathcal{R}(A, B; C, D) = [ABC] : [ABD].$$

Diremos que los cuatro puntos forman una cuaterna harmónica cuando este valor es -1.
Fijaos en el hecho de que dados 3 puntos sobre d, digamos A, B, C, y un punto exterior X, las rectas XA, XB, XC cortarían nuevamente a una paralela a d en los puntos A', B', C'. Para que $[ABC] = [A'B'C']$ se necesita que las rectas sean paralelas (condición necesaria y suficiente).
En cambio, si consideramos 4 puntos sobre d, A, B, C, D', un punto exterior X y los cortes de XA, XB, XC, XD con otra recta cualquiera d' (pongamos A', B', C', D'), se cumple que

$$\mathcal{R}(A, B; C, D) = \mathcal{R}(A', B'; C', D').$$

Por lo dicho anteriormente sobre la razón simple es inmediato que existe un único punto X tal que $\mathcal{R}(A, B; C, X) = \rho$ para cualquier ρ fijo, de manera que si $\mathcal{R}(A, B; C, X) = \mathcal{R}(A, B; C, Y)$, entonces $X = Y$.

Un resultado útil. En un triángulo ABC consideremos tres puntos X, Y, Z en los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea X' la intersección de YZ con la prolongación de BC. Entonces, $(B, C; X, X')$ es harmónica si y solo si AX, BY y CZ concurren.
Demostración. Por el teorema de Menelao,

$$[ABZ] \cdot [BCX'] \cdot [CAY] = -1.$$

Sabemos que por Ceva AX, BY y CZ concurren si y solo si

$$[ABZ] \cdot [BCX] \cdot [CAY] = 1,$$

y usando el resultado anterior eso pasa si y solo si $[BCX'] = -[BCX]$, esto es, si y solo si $\mathcal{R}(B, C; X, X') = -1$.

IMO Shortlist 1995. Sea ABC un triángulo, y sean D, E, F los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea X un punto en el interior de ABC tal que el incírculo de XBC toca a XB, XC y BC en Z, Y y D, respectivamente. Probad que $EFZY$ es cíclico.
Solución. Sea R la intersección de EF con BC. Como AD, BE y CF concurren (en el punto de Gergonne, conjugado isotómico del punto de Nagel), $(B, C; D, R)$ es harmónica. Por el mismo motivo, si R' es el corte de YZ con BC, tenemos que $(B, C; D, R')$ es harmónica, pero eso implica que $R = R'$. Entonces, por potencia de un punto

$$RD^2 = RE \cdot RF$$

y también por potencia de un punto

$$RD^2 = RZ \cdot RY.$$

De aquí se tiene que

$$RE \cdot RF = RY \cdot RZ$$

y esto prueba que $EFZY$ es cíclico.

Otro resultado útil. Sea $(A, B; C, D)$ una cuaterna harmónica y sea M el punto medio del segmento CD. Entonces, $MC^2 = MA \cdot MB$. Del mismo modo, si se cumple esta igualdad última $(A, B; C, D)$ es harmónica.
Demostración. Supongamos que C está en el interior del segmento AB y que D está en el exterior de forma que $|DA| < |DB|$. Entonces $MA = DC/2 - AC$ y $MB = DC/2 + CB$. De esta manera,

$$(DC/2 - AC)(DC/2 + CB) = DC^2/4,$$

que se reescribe como

$$DC(-AC + CB) - 2AC \cdot CB = 0,$$

$$(DA + AC)(-AC + CB) - 2AC \cdot CB = 0$$

$$AD \cdot CB = AC \cdot CB + AC \cdot AC^2 AC \cdot DA = AC \cdot (CB + AC + AD) = AC \cdot DB,$$

y de aquí directamente nos queda que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, como queríamos.
Para probar el recíproco, simplemente "deshacemos.el camino (de hecho, todas las implicaciones que hemos escrito son equivalencias).

Test de selección rumano para la Olimpiada Balcánica Junior 2007. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90^{\text{o}}$. Sea D un punto sobre AC y E la reflexión de A por la recta BD. F es la intersección de CE con la perpendicular a BC por D. Probad que AF, DE y BC son concurrentes.
Solución. Sean $Y = AE \cap BC$, $X = AE \cap BD$, $Z = AE \cap DF$ y $T = DF \cap BC$. Por los

resultados sobre cuaternas harmónicas en el triángulo ACE con las cevianas AF, DE y CY, el enunciado equivale a ver que $(A, E; Y, Z)$ es una cuaterna harmónica. Ahora bien, como X es el punto medio de AE llega con ver que $XE^2 = XY \cdot XZ$, o lo que es lo mismo $AX^2 = XY \cdot XZ$. Pero por el teorema de la altura en ABD, $AC^2 = XB \cdot XD$, así que hay que probar

$$XB \cdot XD = XY \cdot XZ,$$

pero esto se sigue directamente de la semejanza de los triángulos XBY y XDZ.

Conviene no olvidarse de contar

Contar a veces contar es un asunto complejo

Vamos a presentar un problema que mezcla combinatoria y álgebra, y para ello tal vez sea conveniente recordar un clásico que a mí me contaron por primera vez también en una preparación aquí, cuando iba a cuarto de la ESO.

Clásico. Determinad el valor de la suma

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{3n}{3i}.$$

Solución. Recordemos que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

y que si tomamos $a = b = 1$ obtenemos

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

En el caso de que pongamos $n := 2n$, si después evaluamos en $a = 1$, $b = -1$, tendremos que

$$0 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

con lo que si sumamos y dividimos entre 2 la expresión resultante quedará

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}.$$

La idea es que considerando la sustitución de a por 1 y -1 y sumando hemos conseguido dejar únicamente los binomiales en los que la parte de abajo es par.

Si ahora $n := 4n$ podríamos hacer lo mismo, pero en vez de considerar 1 y -1, que son las raíces cuadradas de la unidad, considerar las raíces cuartas: ± 1 y $\pm i$. De esta forma,

$$2^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k},$$

$$2^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k},$$

$$2^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} i^k \binom{4n}{k},$$

$$2^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} (-i)^k \binom{4n}{k}.$$

Ahora usamos que $1^k + (-1)^k + i^k + (-i)^k$ es 4 si k es múltiplo de 4 y 0 "otramente". De esta forma,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k} = \frac{2^{4n} + (1+i)^{4n} + (1-i)^{4n}}{4},$$

y pasando a forma polar se comprueba que $(1+i)^{4n} = (1-i)^{4n} = (-4)^n$.

El caso que nos ocupa es completamente análogo, pero considerando $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. De esta forma, y usando que $\omega^{2k} + \omega^k + 1 = 0$ si k no es múltiplo de 3 y es 3 en otro caso, podemos considerar las expansiones de $(1+\omega)^{3n}$ y $(1+\omega^2)^{3n}$, obteniendo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{2^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n}}{3} = \frac{2^{3n} + 2(-1)^n}{3}.$$

Esta misma idea se puede aplicar en general para hacer la suma $\sum_{k=0}^{n} \binom{an}{ak}$, sumando sobre las raíces a-ésimas de la unidad.

Problema. Determinad cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ cumplen que la suma de sus elementos es múltiplo de 7.

Solución. Aquí hemos de usar una idea similar. La manera más "fácil"de hacerlo es considerar los polinomios $1 + x, 1 + x^2, \ldots, 1 + x^{2017}$. Al hacer el producto de los 2017 polinomios (llamaremos $P(x)$ a este producto), vemos que podemos identificar el término $x^{i_1+\ldots+i_k}$ con el conjunto correspondiente a seleccionar los elementos $i_1, \ldots, i_k$. Así pues, se han de sumar los coeficientes en $x^0, x^7, x^{14}, \ldots$. Para conseguir esto, simplemente basta con considerar $\zeta = e^{2\pi i/7}$ y por el mismo argumento que antes, hacer la suma

$$\frac{P(1) + P(\zeta) + P(\zeta^2) + \ldots + P(\zeta^6)}{7}.$$

Ahora bien, claramente $P(1) = 2^{2017}$, pero para las otras evaluaciones hemos de ser más "finos", y observar que

$$X^7 - 1 = (X-1)(X-\zeta)(X-\zeta^2)\cdots(X-\zeta^6).$$

Si ponemos $X = -1$ y cambiamos el signo, obtenemos que

$$2 = (1+1)(1+\zeta)(1+\zeta^2)\cdots(1+\zeta^6).$$

De esta manera, al evaluar $P(\zeta)$, $P(\zeta^2), \ldots$ es posible ir haciendo grupos de siete factores, con lo cual

$$P(\zeta) = 2^{288}(1+\zeta) \quad P(\zeta^2) = 2^{288}(1+\zeta^2) \quad \ldots \quad P(\zeta^6) = 2^{288}(1+\zeta^6).$$

Así pues, $P(\zeta) + P(\zeta^2) + \ldots + P(\zeta^6) = 2^{288}(5 + 1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^6) = 5 \cdot 2^{288}$. Por lo dicho anteriormente, el número buscado es simplemente

$$\frac{2^{2017} + 5 \cdot 2^{288}}{7}.$$

IMO 2010. Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Nos dan una balanza y n bolas de pesos $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Queremos situar las n bolas en la balanza, una después de otra, de manera que el plato derecho nunca sea más pesado que el izquierdo. En cada paso, seleccionamos una bola aún no colocada y la ponemos en uno de los platos, hasta que todas las bolas se hayan distribuido. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?
Solución. La manera lógica de abordar este problema es mediante una recurrencia. Sea $T(n)$ el número de maneras de hacerlo. Entonces, $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 15$, $T(4) = 105$, $T(5) = 945$, ...y si uno tiene desarrollada la intuición observa que

$$T(n) = (2n-1)\cdots(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}.$$

El objetivo es demostrarlo por inducción, suponiéndolo cierto hasta $n-1$.
Observamos lo siguiente de gran importancia: el problema es equivalente a ir distribuyendo las n bolas de forma que la más pesada siempre esté en el plato izquierdo. Así pues, una vez situada la más grande (digamos en la posición i), las $n-i$ restantes se pueden colocar en el orden que queramos y en el plano que escojamos, esto es, de $(n-i)!\cdot 2^{n-i}$ formas. Para las $i-1$ anteriores, que se pueden escoger de $\binom{n}{i-1}$ maneras se ha de respetar el hecho de que la más grande siempre esté en el plato izquierdo, y eso se puede hacer de $T(i-1)$ formas. En cualquier caso, resulta que

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} T(i-1)\cdot 2^{n-i}\cdot (n-i)!.$$

Usando la hipotesis de inducción y operando,

$$T(n) = 2^n\cdot (n-1)!\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}}\binom{2i-2}{i-1}.$$

Si ahora conseguimos demostrar (por inducción por ejemplo), que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}}\binom{2i-2}{i-1} = \binom{2n}{n}\cdot\frac{n}{2^{2n}}$$

habremos acabado. Para $n = 1$ es cierto, así que si lo suponemos cierto hasta n lo podemos comprobar hasta $n+1$. Para ello,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{2i-1}}\binom{2i-2}{i-1} = \binom{2n}{n}\cdot\frac{n}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}\cdot\frac{2n+1}{2^{2n+1}}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)n!n!} = \binom{2n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2^{2n+2}},$$

tal y como queríamos.
Observación: hay maneras más elegantes de hacer este problema. Pensad en ellas. Por ejemplo, para la bola más ligera hay n opciones, y salvo que se coloque en el primer turno, puede ir a cualquier plato. De aquí se puede deducir que $T(n) = (2n-1)T(n-1)$.

Problema IMO Shortlist 2010. $n \geq 4$ jugadores participan en un torneo de tenis; cada dos jugadores se han enfrentado exactamente una vez y no hay empates. Un conjunto de cuatro jugadores es malo si un jugador fue derrotado por los otros tres y cada uno de estos ganó exactamente un partido y perdió otro al enfrentarse con el resto del conjunto. Si no hay conjuntos malos, y w_i, l_i denotan las victorias y derrotas (respectivamente) de i, probar que

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - l_i)^3 \geq 0.$$

Indiciación. Demostrad las siguientes tres afirmaciones y concluid con ellas

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - l_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{w_i}{2} - \binom{l_i}{2}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{w_i}{3} - \binom{l_i}{3}\right) \geq 0.$$

Problema. Determinad el mayor n para el cual existen números enteros $x_1, \ldots, x_n$ con $|x_i| < n^3$ de manera que $\sum \epsilon_i x_i$ nunca es múltiplo de n, siendo $\epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ y de forma que no todos los ϵ_i son cero.

Ecuaciones funcionales y polinomios

Vietnam 2017. Encontrad todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

USAMO 2014. Encontrad todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{(f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

para todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ con $x \neq 0$.

IMO 2016. Problema 5. Escribimos en la pizarra la ecuación

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

con 2016 factores a cada lado. ¿Cuál es el menor valor de k tal que es posible borrar exactamente k de estos 4032 factores lineales de manera que al menos queda un factor en cada lado y la ecuación resultante no tiene raíces reales?

Un poco de geometría

Dado que la teníamos un poco olvidada, en esta clase nos propusimos retomar algunos temas de geometría que no habíamos trabajado mucho a lo largo de este curso. Muy grosso modo, hablábamos de diferentes problemas de geometría según el tipo de conceptos involucrados: por un lado, la geometría “métrica.$^{\text{es}}$ aquella que habla de conceptos como distancia, ángulos o áreas; por su parte, la geometría afín se refiere a relaciones entre longitudes (la razón simple que aludimos en clases anteriores), y en general a todos aquellos problemas donde únicamente intervienen intersecciones, colinearidades, concurrencias, paralelismos, ... Por último, los conceptos proyectivos (que se abordarán en una clase posterior) son los que requieren un grado de abstracción mayor: por ejemplo, aquí tendríamos el concepto de razón doble de cuatro puntos (que también se ha presentado), y a su vez muchos problemas afines se verá que se pueden "traducir.ª un contexto proyectivo.

En esta clase empezamos repasando algunos conceptos métricos, usando como leitmotiv el siguiente problema:
Problema OME 2009, 2. Sean ABC un triángulo acutángulo, I el centro del círculo inscrito a ABC, r su radio y R el radio del círculo circunscrito a ABC. Se traza la altura $AD = h_a$, con D sobre el lado BC. Probad que

$$DI^2 = (2R - h_a)(h_a - 2r).$$

Antes de pasar a la resolución vamos a recordar algunos hechos relevantes (no para el problema, para la vida misma). En primer lugar, la desigualdad de Euler:

$$R \geq 2r.$$

Esto se puede demostrar simplemente con las sustituciones pertinentes, ya que equivale a

$$\frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p},$$
$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c).$$

Usando ahora la sustitución $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, se llega a

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz,$$

que es trivial por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

Alternativamente, la desigualdad se puede demostrar viendo previamente que si O es el circuncentro, entonces

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Esto se demuestra usando la potencia de I con respecto al circuncentro. Es conocido (demostradlo!) que la bisectriz AI corta al circuncírculo nuevamente en M, el punto medio del arco BC que no contiene a A. Entonces,

$$AI \cdot IM = R^2 - OI^2,$$

y es suficiente con ver que $AI \cdot IM = 2Rr$. Buscando ángulos, $\angle MBI = \angle BIM$, con lo que $MI = MB$. Ahora todo se reduce a un pequeño cálculo:

$$IM = MB = \frac{a}{2\cos(\alpha/2)};$$

$$AI = \frac{p-a}{\cos(\alpha/2)}.$$

Recordamos ahora el conocido (y útil) resultado de que

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \qquad \cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

De esta manera,

$$AI \cdot IM = \frac{a(p-a)}{2\cos^2(\alpha/2)} = \frac{abc(p-a)}{2p(p-a)} = 2 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = 2Rr.$$

De estas relaciones, también deducimos que

$$AI^2 = \frac{bc(p-a)}{p}.$$

Ahora vamos a resolver el problema original, tratando de "simplificar.[el] camino a seguir.
Solución.
Por potencia de un punto, $DI^2 = r^2 + TI^2$, siendo T el punto de tangencia del incírculo con el lado BC. Entonces,

$$DI^2 = r^2 + AI^2 - (h_a - r)^2 = AI^2 - h_a(h_a - 2r).$$

Si ahora vemo que $AI^2 = 2R(h_a - 2r)$, hemos acabado. Ahora bien,

$$2R(h_a - 2r) = 2R\Big(\frac{2S}{a} - \frac{2S}{p}\Big) = \frac{4RS(p-a)}{pa} = \frac{bc(p-a)}{p},$$

que es justamente la expresión que conocemos para AI^2.

Vamos a pasar a otro problema en el que hay dos soluciones posibles (por lo menos). Una usando toda la artillería de la geometría métrica y otra más sintética. **Problema.** Sea ABC un triángulo e I su incentro. Sea Γ el círculo tangente a AB, AC y al circuncírculo de ABC. Sean X, Y los puntos de tangencia de Γ con AB y AC, respectivamente. Entonces, I es el punto medio de XY.
Soluciones. Para la primera recordemos el teorema de Casey: dado un círculo y cuatro círculos tangentes a él, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, de forma que los puntos de tangencia siguen ese orden en el círculo, se tiene que

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}.$$

Cuando los cuatro círculos son puntos, se recupera el teorema de Ptolomeo. En este caso, tenemos 3 puntos y un círculo, y operando se concluye que

$$AX = AY = \frac{bc}{p}.$$

Con esto, tenemos que la distancia de A al punto medio del lado XY es

$$\frac{bc\cos(\alpha/2)}{p},$$

que coincide con la distancia del vértice al incentro. Como ambos puntos están sobre la bisectriz del ángulo $\angle A$ y hacia el mismo "lado", tenemos que el punto medio de XY y el incentro son el mismo, como queríamos ver.

Si queremos evitar el uso del teorema de Casey, podemos recurrir al siguiente resultado:
Resultado: Sea AB una cuerda en un círculo Γ; sea Ω un círculo tangente a AB en D y a Γ en C. Entonces, CD corta a Γ en el punto medio M del arco que no contiene a C.

Demostración. Sea la homotecia centrada en M que lleva Ω a Γ. La recta AB va a parar a una recta tangente a Γ, y paralela a AB; si O es el centro de Γ, sucede entonces que OM es perpendicular a AB, con lo cual M ha de ser el punto medio del arco AB.

Usando este resultado podemos dar otra demostración alternativa a nuestro problema. Sea T el punto de contacto de Γ con el circuncírculo. Entones, TX corta al arco AB en su punto medio; CI también corta en el mismo punto, por lo que TX y CI se cortan en el circuncírculo, y lo mismo pasa con BI y TY. Ahora, el problema se acaba aplicando el teorema de Pascal a A, B, Q, T, P, C (de esto ya hablaremos con más calma).

Problema ISL05. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo que satisface $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ y $\angle ACB = \angle ADC = \angle AED$. Sea P la intersección de DB y CE. Probar que AP biseca al lado CD.
Solución. Sean $Q = AC \cap BD, R = AD \cap CE, M = AP \cap CD$. Por el teorema de Ceva, llega con ver que $\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD}$. De las igualdades del enunciado, ABC, ACD, ADE son semejantes por lo que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$. Dado que $\angle BAD = \angle CAE$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, los triángulos ABD y ACE son semejantes. Como las bisectrices de los triángulos son AQ y AR, se tiene que $\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AR}$ (usando las semejanzas y la fórmula de la longitud de la bisectriz como $\frac{2bc}{b+c}\cos(\alpha)$). De aquí es ya inmediato que $\frac{AQ}{AR} = \frac{AC}{AD}$, que es equivalente a lo que queríamos demostrar.
Alternativamente, podemos ver que el cuadrilátero $ABCD$ es semejante a $ACDE$, ya que podemos pasar del uno al otro con un giro y una homotecia, dado que el factor de escala entre el triángulo ABC y ACD es el mismo que entre ACD y ADE.

Vamos a recordar ahora algunas propiedades (y la definición) de las simedianas, como hicimos aquel día de octubre perdido en los recovecos de la memoria.
Problema. Sea ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Consideremos que las tangentes a Γ en B y C se cortan en D. Probar que AD es la simediana desde A del triángulo ABC (la reflexión de la mediana a través de la bisectriz interior).
Soluciones. Empezamos haciendo una solución puramente computacional con trigonometría. Sea M' el corte de la reflexión de AD por la bisectriz de $\angle BAC$ con BC; entonces, usando el teorema del seno en BAM' y en $AM'C$ se llega inmediatamente a que $BM' = M'C$ (lo usamos primero en BAM', CAM' y luego en BAD, CAD, para lo que tenemos en cuenta que $\angle DBC = \angle BAC$ por ángulo semiinscrito):

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c \sin \angle CAD}{b \sin \angle BAD} = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} = 1.$$

Alternativamente, sea O el circuncentro de ABC y sea ω el círculo con centro en D y radio DB, que corta a AB y AC en P y Q respectivamente. $\angle PBQ = \angle BQC + \angle BAC = 1/2(\angle BDC + \angle DOC) = 90^o$, y entonces PQ es un diámetro de ω y pasa por D. Como $\angle ABC = \angle APQ$, los triángulos ABC y AQP son semejantes. Por la semejanza, como D es el punto medio de QP, se tiene que $\angle BAM = \angle QAD$, y hemos acabado.
Otra solución posible (y que da lugar a una configuración bastante habitual en problemas) es la que os contó Gerard. Consideramos los puntos E y F donde el círculo con centro en D y radio $DB = DC$ corta a las rectas AB y AC respectivamente. Entonces, buscando ángulos vemos que ABC y AEF son semejantes (las rectas BC y EF son antiparalelas) y además $DE = DF$. Por tanto, D el punto de EF. Si ahora aplicamos una simetría por la bisectriz seguida de una homotecia de centro A y factor $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF}$, vemos que E se convierte en C y F en B. D ha de ir a parar al punto medio de BC,

con lo cual queda probado que AD es una simediana.

Vamos a recordar algunas propiedades de las simedianas:

Problema. Probad las siguientes propiedades relacionadas con las simedianas: en lo que sigue, asumamos que las tangentes al circuncírculo de ABC en B y C se cortan en X. Sea K el corte de AX con el circuncírculo de ABC y J el corte con el lado BC. Entonces, se tiene lo siguiente:

1. $\frac{BJ}{JC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.
2. Los triángulos ABK y AMC son semejantes.
3. La circunferencia de diámetro AO y el circuncírculo de BOC se cortan en el punto medio de AK.
4. BC es una simediana tanto de BAK como de CAK.
5. BC es también bisectriz de $\angle AMK$.
6. Las tangentes al circuncíulo de ABC en A y K se cortan en BC.

Solución.

1. Usamos repetidamente el teorema del seno.
2. Sale directamente comparando ángulos (y usando arco capaz).
3. Consideremos el punto medio de AK, al que llamaremos T. El punto T está en la circunferencia de diámetro AO porque $\angle ATO = AKA' = 90^{\text{o}}$, donde A' es el simétrico de A respecto de O. Para ver $\angle BTC = \angle BOC$, ponemos $\angle BTC = \angle BTK + \angle KTC$ y usamos las semejanzas anteriores.
4. Por el apartado anterior, basta con ver que $\angle KBC = \angle ABT$, que es nuevamente comparar ángulos.
5. Podemos demostrar, por ejemplo con el primer apartado, que KJ es simediana de KBC, y también que $\frac{BK}{CK} = \frac{c}{b}$. Ponemos entonces $\angle BMK = 180^{\text{o}} - \angle KBC - \angle BKM$ y usamos que $\angle KBC = \angle BAM$ y que $\angle BKM = \angle CKA$ (también se puede deducir del apartado 3).
6. BC es simediana.

Las siguientes páginas no están separadas por temáticas y responden al modelo de clase que exploramos en la última parte del curso a petición de los alumnos, donde más familiarizados ya con las técnicas básicas, preferían tener una hoja de problemas en la que trabajar durante la sesión y que al final de la misma discutiésemos las soluciones.

Problema 1. Encontrad el menor entero positivo n para el que existe un conjunto $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de n enteros positivos diferentes tal que

$$\Big(1-\frac{1}{s_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{s_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{s_n}\Big)=\frac{51}{2010}.$$

Solución. Vamos a probar que no es posible que $n \leq 38$. Observamos que $s_i \geq i+1$, y como $1-\frac{1}{n}$ es una función creciente, si $n \leq 38$ sucederá que

$$\frac{51}{2010}=\Big(1-\frac{1}{s_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{s_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{s_n}\Big)\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{39},$$

y eso no es posible porque $51 \cdot 39 = 1989$ no es mayor que 2010.
Para ver ahora que con $n = 39$ sí es posible vamos a considerar el conjunto $\{2, 3, \ldots, 33, 35, \ldots, 40, 67\}$. En este caso, el producto queda

$$\frac{1}{33}\cdot\frac{34}{40}\cdot\frac{66}{67}=\frac{17}{670}=\frac{51}{2010}.$$

Problema 2. Consideremos un polinomio $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_9)$, donde $d_1, d_2, \ldots, d_9$ son enteros diferentes. Probad que existe un N entero tal que para todos los enteros $x \geq N$, el número $P(x)$ es divisible por algún primo mayor que 20.
Solución. La idea es que hay 8 primos menores que 20, que son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, y no puede pasar que dos de los factores sean al mismo tiempo divisibles por una potencia "grande"de uno de estos primos. Vamos a formalizar rigurosamente esta idea: sea $D = \max d_i - \min d_i$ y sea r_2 el menor entero tal que $D < 2^{r_2}$; definimos de forma análoga $r_3, r_5, \ldots, r_{19}$. Sucede que no hay dos factores que puedan ser divisibles por r_2 ya que si lo fuesen también los sería la diferencia, que está entre 0 y 2^{r_2}, con lo que no es posible; por el mismo motivo, no hay dos divisibles por r_3, por r_5, ..., ni por r_{19}. Así pues, hay un factor entre los 9 que ha de ser de la forma $2^{s_2}\cdots 19^{s_{19}}\cdot Q$, donde $s_i < r_i$ y Q es la parte compuesta por los divisores primos mayores que 20. Sea $M = 2^{r_2-1}\cdots 19^{r_{19}-1}$; tomando $x + d_1 > M$, es decir $x > M - d_1$, nos aseguramos que todos los factores son mayores que M, con lo que el factor que hemos considerado que no es divisibles por potencias "grandes"de los primos pequeños ha de tener algún factor primo mayor que 20, tal y como queríamos.

Problema 3. Sea k un entero fijado mayor que 1, y sea $m = 4k^2 - 5$. Probad que existen enteros positivos a, b tales que la sucesión (x_n) definida por

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tiene todos sus términos coprimos con m.

Problema 4. Un entero positivo se llama "alternado"si sus dígitos son alternativamente par e impar. Encontrad todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo alternado.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un entero y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reales positivos tales que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\Big(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\Big).$$

Probad que t_i, t_j, t_k son los lados de un triángulo para todo i, j, k con $1 \leq i < j < k \leq n$.
Solución. Vamos a empezar considerando el caso $n = 3$. En concreto, vamos a probar el contrarrecíproco: si $a \geq b + c$, entonces sucede que

$$(a + b + c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geq 10.$$

Esto es equivalente a ver que

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b + c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 7,$$

y como $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, es suficiente con probar que

$$\frac{b + c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 5.$$

Ahora bien, sucederá que $\frac{b+c}{a} \leq 1$ y $a\Big(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) \geq 4$, así que no podemos concluir de forma tan directa como nos gustaría. Ahora bien, observamos que

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b + c},$$

lo cual es directo ya sea “operando”, usando Cauchy, ... Nos llega entonces con ver que

$$\frac{b + c}{a} + \frac{a}{b + c} + \frac{3a}{b + c} \geq 5,$$

pero si ahora llamamos $b + c = d$, esto se sigue directamente de

$$\frac{d}{a} + \frac{a}{d} \geq 2, \quad 3 \cdot \frac{d}{b + c} \geq 3.$$

Una manera alternativa de proceder para demostrar que

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 5$$

es justificar que $f(x) = \frac{b}{x} + \frac{x}{b}$ es una función creciente para $x > b$. Como $x \geq b + c$ el mínimo se alcanza cuando $x = b + c$, y razonando de forma análoga para los otros sumandos, será suficiente con demostrar la desigualdad cuando $a = b + c$, lo cual es un cálculo directo.
Para el caso general, queremos ver que la suma de las $\binom{n}{2}$ parejas $\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}$ es mayor o igual que $n^2 - n + 1$ cuando tres no forman un triángulo, digamos a, b, c. Consideramos las $\binom{n}{2} - 3$ parejas diferentes a (a, b), (a, c) y (b, c); cada una de estas es mayor o igual que 2. Así pues, esta parte es mayor que $n^2 - n - 6$ y simplemente hay que comprobar que

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b + c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 7,$$

que es precisamente lo que demostramos antes.

Problema 6. Sean a, b, c, d números reales que cumplen $a + b + c + d = 6$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Probad que

$$36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48.$$

Solución. El problema se simplifica en el momento en que observamos que la expresión $a^4 - 4a^3$ nos recuerda al "comienzo"de $(a-1)^4$. De esta manera,

$$4a^3 - a^4 = -(a-1)^4 + 6a^2 - 4a + 1,$$

y sumando sobre las cuatro variables, la desigualdad equivaldrá a

$$36 \leq -\Big((a-1)^4 + (b-1)^4 + (c-1)^4 + (d-1)^4\Big)52 \leq 48.$$

Si ponemos ahora $a-1 = x$, $b-1 = y$, $c-1 = z$, $d-1 = t$, tendremos que la desigualdad equivale a

$$4 \leq x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \leq 16,$$

donde $x + y + z + t = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4$. De aquí observamos que la desigualdad correspondiente a ≤ 4 se sigue por medias (aritmética versus cuadrática). La otra es consecuencia de que

$$16 = \sum x^4 + \sum x^2y^2 \geq \sum x^4,$$

donde $\sum$ se refiere a la suma cíclica habitual.

Cultura general. Demostrad (que lo he comentado algún día pero no lo hemos probado) que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ cuando $(m, n) = 1$, y probad también que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

Otro de cultura general. Sea p un primo que no divide a 10, y sea n un entero tal que $0 < n < p$. Sea $d = \text{ord}_p(10)$. Probad que la longitud del periodo decimal de n/p es d, y demostrad también que si d es par, el periodo de n/p se puede dividir en dos partes de suma $10^{d/2} - 1$. Por ejemplo, el de $1/7$ es 142857 y se tiene que $142 + 857 = 999$.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con ortocentro H. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersecan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY corta a BH en P y a CH en Q, probad que el cuadrilátero $HPDQ$ es cíclico.

Problema 2. Joan y Sílvia jugan al siguiente juego: primero deciden un entero N. Luego, escriben números en la pizarra por orden. Joan empieza escribiendo un 1. Después, cuando uno ha escrito el número n, el otro escribe o bien $n+1$ o bien $2n$, siempre y cuando el número no sea mayor que N. El jugador que escribe N en la pizarra gana. Determinad quién gana para $N = 2017$ y encontrad el número de enteros positivos $N \leq 2017$ tales que Sílvia tiene una estrategia ganadora.

Solución. Comenzamos observando que cuando N es impar Joan siempre tiene estrategia ganadora. Si él ha escrito un número impar (que es lo que sucede en su primer movimiento), Sílvia está forzada a escribir uno par, con lo que él puede luego sumar uno y garantizarse que escribe siempre un impar, con lo que en particular también escribirá N.

En segundo lugar, observamos que si alguien tiene una estrategia ganadora para k entonces también la tiene para $N = 4k$. En este caso, escribir un número par en la pizarra entre $2k + 2$ y $4k$ es sinónimo de victoria, con lo cual escribir cualquier número entre $k + 1$ y $2k$ te hace perder. De esta manera, aquel jugador que tiene una estrategia ganadora para k o bien alcanza k y en su siguiente turno el otro jugador dirá o bien $k + 1$ o $2k$ (lo que le hace perder), o bien no alcanza k porque el otro jugador no le ha "dejado"duplicando el número en algún momento anterior, es decir, diciendo una cantidad que es mayor que k pero menor que $2k$, lo cual le lleva a perder.

Análogamente, si alguien tiene una estrategia ganadora para k entonces también la tiene para $N = 4k+2$. En este caso, escribir un número par en la pizarra entre $2k+2$ y $4k+2$ es sinónimo de victoria, con lo cual escribir cualquier número entre $k+1$ y $2k+1$ te hace perder. De esta manera, aquel jugador que tiene una estrategia ganadora para k o bien alcanza k y en su siguiente turno el otro jugador dirá o bien $k+1$ o $2k$ (lo que le hace perder), o bien no alcanza k porque el otro jugador no le ha "dejado"duplicando el número en algún momento anterior, es decir, diciendo una cantidad que es mayor que k pero menor que $2k$, lo cual le lleva a perder.

Observamos que en el intervalo $[1, 4]$ Sílvia gana solo para $N = 2$; de esta manera, en $[5, 16]$ ganará para dos valores, 8 y 10; en $[17, 64]$ ganará para cuatro (entre 32 y 42); en $[65, 256]$ para ocho (entre 128 y 170); en $[257, 2056]$ para dieciséis (entre 512 y 682). Así pues, Sílvia gana solo para 31 valores.

Problema 3. Si k es un entero positivo, sea $c(k)$ el cubo más grande que es menor o igual que k. Encontrad todos los enteros positivos p para los cuales la siguiente sucesión está acotada:

$$a_0 = p, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n), \text{ para } n \geq 0.$$

Problema 4. Hallad todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y para algún entero c se cumple que

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x).$$

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Probad que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

Problema 6. Determinad el mayor n para el cual existen números enteros $x_1, \ldots, x_n$ con $|x_i| < n^3$ de manera que $\sum \epsilon_i x_i$ nunca es múltiplo de n, siendo $\epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ y de forma que no todos los ϵ_i son cero.

Los siguientes problemas son en realidad todos el mismo problema:
Problema. Los siguientes apartados son independientes:

1. Demuestra que la ecuación
$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3$$
tiene infinitas soluciones en los enteros positivos.

2. Demuestra que la ecuación
$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}=n,$$
donde n es un natural distinto de 3, no tiene soluciones en los enteros positivos.

3. Encontrar todas las soluciones de
$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3.$$

4. Definimos la sucesión dada por $a_0=1$, $a_2=1$ y
$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{a_{n-1}}$$
para $n\geq 2$. Demostrar que a_n es entero. Discutir qué han de cumplir las condiciones iniciales a_1 y a_2 para que la sucesión así definida tenga todos sus términos enteros.

5. Probad que $a_n=F_{2n-1}$, siendo F_n el n-ésimo número de Fibonacci.

6. Determinad $v_2(a_n)$ y $v_5(a_n)$.

Solución. En primer lugar observamos que si $a=b$, la expresión se convierte en $2+\frac{1}{a^2}$, cuya única solución es $a=1$; en ese caso toma el valor 3. Supondremos por tanto que $a>b$ y por tanto $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\geq 3$.
Vamos a demostrar que si (a,b) satisfacen $\frac{a^2+b^2+1}{ab}=k$, entonces existe una solución (a',b') con $a'+b'<a+b$; este proceso lo podremos repetir indefinidamente siempre que $a\neq b$, con lo que concluimos que partiendo de cualquier solución podremos llegar a la $(1,1)$, con lo que solo podrá ser $k=3$. Vamos a formalizar esta idea, suponiendo para ello que $a>b$. Entonces, la ecuación
$$a^2-kba+b^2+1=0$$
se puede ver como una cuadrática una vez fijamos b; una solución será a; la otra, $\frac{b^2+1}{a}<a$, puesto que $a^2-b^2>1$. Observemos que esta otra solución también se puede escribir como $kb-a$, lo que muestra claramente que ha de ser entera.
Así pues, si (a,b) es solución $\left(b,\frac{b^2+1}{a}\right)$ también lo será (y ahora b es el número mayor a no ser que hayamos llegado al $(1,1)$). Esto prueba automáticamente que el único valor entero que puede tomar la expresión es el 3.
Para probar que hay infinitas soluciones en el caso 3, solo tenemos que seguir este razonamiento de forma inversa. Empezamos con $a_0=a_1=1$ y definimos $a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{a_{n-1}}=3a_n-a_{n-1}$. Por inducción, tendremos que la sucesión es creciente y claramente todos sus términos son enteros. Además, cualquier pareja (a_i,a_{i+1}) cumple que $\frac{a_i^2+a_{i+1}^2+1}{a_ia_{i+1}}=3$,

por la propia construcción. Pero no solo eso: si tenemos una solución (b_n, b_{n+1}) diferente, podremos ir siguiendo este proceso descendente e ir bajando por los (b_i, b_{i+1}), de manera que $b_{i-1} = \frac{b_i^2+1}{b_{i+1}}$ hasta que lleguemos al $(1,1)$; es decir, (b_n, b_{n+1}) tenía que ser un término de la sucesión.

Finalmente, observamos que el término general de a_n cumple la recurrencia

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,$$

con lo que tendremos que buscar las raíces de $x^2 - 3x + 1 = 0$, que son $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Estas se corresponden a ϕ^2 y $\bar{\phi}^2$, donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Así pues,

$$a_n = \alpha\phi^{2n} + \beta\bar{\phi}^{2n}$$

y si imponemos que $a_0 = a_1 = 1$ nos queda que $\alpha = -\frac{\bar{\phi}}{\sqrt{5}}, \beta = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ y por tanto, usando que $\phi\bar{\phi} = -1$, nos quedará que

$$a_n = \frac{\phi^{2n-1} - \bar{\phi}^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Por otra parte,

$$F_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

De aquí es evidente que $a_n = F_{2n-1}$.

Problema. Encontrad todas las funciones f de los reales en sí mismos tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x),$$

para todos los reales x, y.
Solución.
Poniendo $y = -f(x)$ llegamos a que

$$f(0) - 2x = f(f(-f(x)) - x),$$

y si ahora tomamos $x = \frac{f(0)-c}{2}$ tenemos que existe un cierto valor cuya imagen es c, y por tanto la función es exhaustiva.
Sea λ tal que $f(\lambda) = 0$ y tomamos $x = \lambda$; entonces

$$f(y) = 2\lambda + f(f(y) - \lambda),$$

y poniendo $z = f(y) - \lambda$ (que por la exhaustividad de la función recorre todos los valores) nos queda que

$$z = \lambda + f(z),$$

y así pues cualquier solución ha de ser de la forma $f(x) = z + c$, y se comprueba sustituyendo en la ecuación original que esto siempre funciona.

Problema. Situamos números entre 1 y $p-1$ en una fila con m casillas (los números se pueden repetir). Determinad de cuántas maneras se puede hacer si queremos que la suma no sea múltiplo de p.
Solución.

Si la suma de las $m-1$ primera casillas no es múltiplo de p (digamos s), podemos situar en la última casilla cualquier valor que no sea $-s$. En cambio, si la suma es múltiplo de p, en la última podemos poner cualquiera de los $p-1$ números. El número de maneras de hacer que la suma de las $p-1$ primeras sea múltiplo de p es considerar cualquier distribución de las $p-2$ primeras casillas que no lo sea y añadir el número correspondiente. Por tanto, tenemos la recurrencia

$$a_n = (p-2)a_{n-1} + (p-1)a_{n-2},$$

donde a_n es el número buscado. Las raíces del polinomio

$$x^2 - (p-2)x - (p-1) = 0$$

son $x = -1$ y $x = p-1$. Por tanto,

$$a_n = \alpha(p-1)^n + \beta(-1)^n,$$

y ahora imponemos que $a_1 = p-1$ y $a_2 = (p-1)(p-2)$ (o alternativamente se puede considerar que $a_0 = 0$). En cualquier caso,

$$a_n = \frac{p-1}{p}\Big((p-1)^n - (-1)^n\Big).$$

Problema. Sea $n \geq 2$ un entero positivo, con divisores $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Probad que

$$d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2,$$

y determinad en qué casos dicha expresión es un divisor de n^2.

Problema. Tres puntos distintos A, B, C se sitúan en una recta en ese orden. Sea Γ un círculo que pasa por A y C y cuyo centro no está sobre AC. Sea P la intersección de las tangentes a Γ en A y C. Supongamos que Γ corta a PB en Q. Probar que la intersección de la bisectriz de $\angle AQC$ y la línea AC no depende de la elección de Γ.

Esta sesión contó con la presencia de los miembros del equipo español que representaría a España en la Olimpiada Internacional, que habían venido para el fin de semana intensivo que se llevó a cabo también en la FME a finales de mayo.
Ese día empezamos con dos desigualdades:
Problema 1. Sean x, y, z reales positivos de forma que $xy + yz + zx = 3xyz$. Probad que

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

y determinad cuándo se da la igualdad.
Solución. La condición que nos dan es equivalente a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3,$$

y por tanto la desigualdad inicial se transforma en

$$x^2y + \frac{1}{y} + y^2z + \frac{1}{z} + z^2x + \frac{1}{x} \geq 2x + 2y + 2z.$$

Ahora bien, esto es cierto por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, ya que

$$x^2y + \frac{1}{y} \geq 2y$$

y análogamente para los otros sumandos. La igualdad se da si y solo si $x^2y^2 = y^2z^2 = z^2x^2$, lo que equivale (por estar en reales positivos) a $xy = yz = zx$. Ahora bien, si esto sucede será $3yz = 3xyz$, de donde $x = 1$ y de forma similar se tiene que $y = z = 1$.

Solución alternativa. La desigualdad se puede reescribir como

$$\frac{x^2}{1/y} + \frac{y^2}{1/z} + \frac{z^2}{1/x} \geq 2s - 3,$$

siendo $s = x + y + z$. Aplicando al lado izquierdo la desigualdad de Cauchy (en forma Bergstrom, Engel o Titu, como queráis llamarla), tenemos que es mayor o igual que

$$\frac{(x + y + z)^2}{1/x + 1/y + 1/z} = \frac{s^2}{3},$$

y esto es claramente mayor que $2s - 3$ puesto que $(s - 3)^2 \geq 0$. La igualdad se da cuando $x + y + z = 3$, pero dado que $\frac{3}{1/x+1/y+1/z} = 1$ tenemos que la media aritmética coincide con la armónica, por lo que ha de ser $x = y = z = 1$.

Problema 2. Sean a, b, c enteros positivos tales que $a + b + c = 1$. Probad que

$$\frac{a^{-3} + b}{1 - a} + \frac{b^{-3} + c}{1 - b} + \frac{c^{-3} + a}{1 - c} \geq 123.$$

Solución.
Observamos que

$$\frac{a^{-3} + b}{1 - a} = \frac{1 + ba^3}{a^3(b + c)} = \frac{a + b + c + ba^3}{a^3(b + c)} = \frac{1}{a^3} + \frac{1 + ba^2}{a^2(b + c)} = \ldots =$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} + 1 + \frac{a + b}{b + c}.$$

Aplicando ahora las desigualdes entre las medias aritmética y harmónica (y también las de orden -2 y -3), tenemos que

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq 81,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 27,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9,$$

y es suficiente con ver que

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3,$$

que es inmediato por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

Los dos siguientes son de la olimpiada del Benelux del 2010, no deberían ser muy difíciles, ...

Problema 3. Un conjunto finito de enteros es "malo"si sus elementos suman 2010. Un conjunto de enteros es "catalán"si ninguno de sus subconjuntos es "malo". Determinar el menor entero positivo n tal que $\{502, 503, \dots, 2009\}$ se puede particionar en n conjuntos catalanes.
Solución. La respuesta es $n = 2$; lo primero que observamos es que la suma de 4 elementos siempre es mayor que 2010; por su parte, los números mayores o iguales que 1509 no tienen ninguna influencia y se pueden obviar, porque al sumarlos con cualquier otro siempre dan un resultado mayor a 2010.
Hago un bloque con $\{502, \dots, 670\}$; a continuación, pongo en otro a $\{1340, \dots, 1508\}$. En ese mismo he de poner a $\{671, \dots, 1005\}$, ya que para cualquier número de aquí hay una pareja del primer bloque con la que sumaría 2010; en el bloque del primero han de ir entonces $\{1006, \dots, 1339\}$. Así pues, si

$$A = \{502, \dots, 670\} \cup \{1006, \dots, 1339\},$$

$$B = \{671, \dots, 1005\} \cup \{1340, \dots, 2009\}$$

tenemos que ambos conjuntos son buenos (hay que escribir una breve parrafada yendo "caso por caso"para ver que no hay dos elementos ni en A ni en B que sumen 2010 y lo mismo para tres elementos).

Problema 4. Encontrar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales de manera que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b) = 3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

para todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Solución. En primer lugar observamos que poniendo $a = b = c = 0$ nos queda que $p(0) = 0$. Por otra parte, podemos hacer el cambio $a - b = x$, $b - c = y$ (nótese que x, y pueden tomar cualquier valor real) y tendremos entonces que

$$p(x+2y)+p(-2x-y)+p(x-y) = 3p(x)+3p(y)+3p(-x-y).$$

Si ahora sustituimos $y = 0$ obtendremos que

$$2p(x) + p(-2x) = 3p(x) + 3p(-x),$$

de donde queda que

$$p(-2x) = p(x) + 3p(-x).$$

Si $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x$ y miramos el coeficiente de x^n a ambos lados vemos que se ha de cumplir que

$$(-2)^n = 1 + 3(-1)^n.$$

Si n es impar el lado derecho vale -2 y $n = 1$; si n es par el lado derecho vale 4 y $n = 2$. Por tanto, el grado del polinomio es 1 o 2. Se comprueba finalmente sustituyendo en la ecuación original que cualquier polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + bx$ cumple las condiciones.

Para terminar, dos de números:

Problema 5. Sea $n > 6$ un número perfecto, y sea $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ su factorización de manera que $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Probad que e_1 es par.
Solución. Observemos que la ecuación planteada es equivalente a

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} = 2 \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}.$$

Obsérvese que

$$\frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} = p_1^{e_1} + \ldots + p_1 + 1,$$

y si e_1 es impar tendremos que $p_1 + 1$ divide a esa expresión. Por tanto, $p_1 + 1$ divide al lado derecho. Ahora bien, como es mayor que 2 ha de dividir a alguno de los p_i; obviamente eso pasará si y solo si $p_1 + 1 = p_i$, lo que nos lleva a $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$. Pero entonces, tanto $n/2, n/3, n/6$ y 1 son divisores de n distintos de n, y se tiene que

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = n + 1 > n.$$

Problema 6. Determinar todos los valores enteros no negativos que puede tomar la expresión

$$\frac{m^2 + n^2 + mn}{mn - 1},$$

siendo m, n enteros no negativos tales que $mn \neq 1$.
Solución. Probaremos que si esta expresión es un entero, podemos reducirnos a un caso en el menor de los dos números es ≤ 2, y a partir de ahí será sencillo concluir. Restando 1, nos podemos reducir a

$$\frac{m^2 + n^2 + 1}{mn - 1} = k.$$

La k nunca será 0 y solo será negativa si uno de los números es 0.
Escribimos la ecuación como una cuadrática,

$$m^2 - knm + (n^2 + 1 + k) = 0.$$

Supondré que $m > n$, ya que cuando son iguales tenemos $\frac{2m^2+1}{m^2-1} = 2 + \frac{3}{m^2-1}$, lo que lleva a que $m \leq 2$.
Si (m, n) es solución también lo será $\left(n, \frac{n^2+1+k}{m}\right)$. Ahora bien, si consideramos aquella solución (una vez fijado k) que minimiza la suma, podemos pasar a una con suma menor, ya que
$$m > \frac{n^2+1+k}{m}.$$
Esto es así por ser equivalente, uno vez sustituimos el valor de k, a
$$(m-n)(m+n) \geq m+n > 1 + \frac{m^2+n^2+1}{mn-1},$$
donde la última desigualdad estrictva es cierta porque operando vemos que equivale a $mn > m+n$, que cuando ambos números son mayores que 2 es claramente cierta, pues $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3}$.
De esta manera, solo hemos de mirar qué valores se obtienen cuando $n = 0, 1, 2$ (de hecho si $n = 2$ y $m \neq 2$ podemos volver a reducir). En cualquier caso, es fácil comprobar que solo puede tomar los valores $0, 4, 7$.

Problema 1. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$f(xy) \cdot \gcd\left(f(x)f(y), f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = xyf\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)$$

para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$.
Solución.
Sustituyendo $y = 1/x$ nos queda que

$$f(1)f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right),$$

con lo que $f(1) = 1$. Sustituimos luego $y = 1$ y después $x = 1$, y aislando el máximo común divisor de x y $1/x$ en ambos casos, llegamos (después de sacar raíces cuadradas ya que todo es positivo) a que $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Por consiguiente, el máximo común divisor de $xf\left(\frac{1}{x}\right)$ y $f\left(\frac{1}{x}\right)$ es 1. Por tanto $f(1/x) = 1$ y $f(x) = x$ cuando x es entero. Para un racional m/n, ponemos $x = m$, $y = n$ y nos queda que

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{\gcd(m, n)},$$

que se comprueba que funciona. Es decir, f nos devuelve el denominador del racional cuando lo expresamos como fracción irreducible.

Problema 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Joan y Sílvia (dos personas de mal vivir que ya aparecieron en un problema anterior) juegan al siguiente juego que implica a n ciudades de Catalunya. Exactamente dos de ellas tienen una fábrica (Sant Cugat y Olot). Inicialmente no hay ninguna carretera. Joan y Sílvia juegan en turnos de la siguiente manera: cada vez, el jugador al que le toca selecciona dos ciudades C_1 y C_2 tales que:

- C_1 y C_2 no están conectadas por una carretera;
- al menos una de ellas está conectada por una serie de carreteras con una fábrica (o tiene ella misma la fábrica).

Pierde el jugador que hace que se pueda ir de una fábrica a otra. Si Joan empieza, determinad para qué $n \geq 2$ tiene una estrategia ganadora.
Solución. El problema se puede reformular en términos de grafos. Hay dos vértices distinguidos A y B y en cada turno los jugadores van añadiendo aristas. Si n es par Sílvia puede jugar de forma simétrica: supongamos que después de k movimientos de cada jugador las componentes conexas donde están A y B tienen r vértices, $v_1 = A, v_2, \ldots, v_r$ y $w_1, \ldots, w_r$ de manera que v_i está conectado con v_j si y solo si w_i está conectado con w_r. Vamos a probar que después de $k+1$ movimientos por parte de jugador seguiremos en una situación análoga o Sílvia habrá ganado. Si Joan no puede hacer aristas en ninguna componente ni añadir nuevos vértices, ha perdido. Si añade un vértice nuevo a A conectándolo con v_i, Sílvia añade uno nuevo (había un número par al principio) conectándolo con w_i; por su parte, si Joan conecta v_i y v_j Sílvia conecta w_i y w_j. Esto mismo también lo puede hacer cuando el número de vértices es $4k + 1$, porque Joan añadirá el último vértice V conectándolo por ejemplo con v_i; cada vez que Joan une V con un v_k, Sílvia lo conecta con otro, y si el movimiento no involucra a V sigue la misma estrategia de antes. De esta manera, como el número de vértices en cada

componente $n/2$ es par se asegura hacer el último movimiento que una V con alguien de la componente.
En cambio, si $n = 4k + 3$ Joan puede ganar. En el momento en que se han gastado todos los vértices, tenemos una componente conexa con k y otra con $n - k$, y nadie las unirá hasta que se hayan puesto todas las aristas posibles,

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2},$$

pero k y $n - k$ han de ser (módulo 4) o bien $\{0, 3\}$ o bien $\{1, 2\}$ y teniendo en cuenta que $\binom{n}{2}$ es par si y solo si n es o 0 o 1, tenemos que esa suma es siempre impar, con lo que Joan gana.

Problema 3. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple que $\angle B = \angle C$ y $\angle D$ es recto. Supongamos que $|AB| = 2|CD|$. Probar que la bisectriz de $\angle ACB$ es perpendicular a CD.
Solución. Sea P el simétrico de C respecto a la recta AD, que por ser $\angle D = 90$ se puede ver como el simétrico de C respecto de D. Entonces, $AB = CP$ y como $\angle B = \angle C$ tenemos que BC y AP son paralelos porque $BCPA$ es un trapecio isósceles. En particular $\angle ACB = \angle CAP$ y si trazamos las bisectrices de esos dos ángulos serán paralelas. Ahora bien, la bisectriz de $\angle CAP$ es AD, con lo que AD es paralelo a la bisectriz de $\angle ACB$, pero AD es perpendicular a CD, y por tanto hemos acabado.

Solución alternativa. Sea $T = AD \cap BC$ y M el punto medio de AB. Como $BM = CD$, $BCDM$ es un trapecio isósceles y BC es paralelo a MD, con lo que D ha de ser el punto medio de AT. En particular, los triángulo DCA y DCT son iguales y por tanto ACT es isósceles, siendo CD la bisectriz interior, que es perpendicular a la bisectriz exterior. Concluimos que CD es entonces perpendicular a la bisectriz de $\angle ACB$, como se quería ver.

Problema 4. Un cuadrado $n \times n$ con $n \geq 2$ es “matemático”si cada casilla contiene un número entero positivo diferente de manera que para cada fila y para cada columna al hacer el máximo común divisor de los n números en esa fila o columna se obtienen $2n$ números diferentes.

1. Probar que en cada cuadrado matemático hay una casilla con un número mayor o igual que $2n^2$.

2. Digamos que un cuadrado matemático es bueno si los n^2 números son menores o iguales que $2n^2$. Determinar para qué $n \geq 2$ existe un cuadrado matemático bueno.

Problema 5. ¿Es posible que $n^7 + 7$ sea un cuadrado perfecto?
Solución. Vamos a probar que la ecuación $n^7 + 7 = m^2$ no tiene soluciones enteras. Esto es lo mismo que

$$n^7 + 128 = m^2 + 11^2.$$

Ahora bien, sabemos que en la decomposición en factores primos del lado derecho solo puede haber primos de la forma $4k + 1$ o de la forma $4k + 3$ elevados a exponente par, y en este caso han de dividir tanto a m como a 11, con lo que tan solo podría salir 11^2. Por su parte,

$$n^7 + 7 = (n + 2)(n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64).$$

Observemos que necesariamente n es impar y m es par, con lo que n es uno módulo 4 y $n+2$ es congruente con 3 módulo 4; así pues, hay un factor primo de la forma $4k+3$ que aparece con exponente impar en su descomposición. Veamos si puede aparecer en el otro factor. Como $n \equiv -2$ módulo p, el otro factor será $7 \cdot 64$, con lo que el único que podría salir sería el 7; esto me permite concluir ya que o bien hay un primo de la forma $4k+3$ con exponente impar en la descomposición, o bien el 7 (que no es el 11) está en la descomposición, lo cual no es posible.

Problema 6. Sean a, b, c números reales positivos. Probar que

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

Podemos reescribir la desigualdad como

$$\frac{ab}{a+b} \cdot ab + \frac{bc}{b+c} \cdot bc + \frac{ca}{c+a} \cdot ca \geq \frac{ab}{a+b} \cdot ca + \frac{bc}{b+c} \cdot ab + \frac{ca}{c+a} \cdot bc.$$

Si suponemos $a \geq b \geq c$ es directo ver que

$$ab \geq ca \geq bc,$$

y también que

$$\frac{ab}{a+b} \geq \frac{ca}{c+a} \geq \frac{bc}{b+c},$$

y el problema es ahora inmediato por la desigualdad del reordenamiento.

Problema 1. Determinar el mayor entero positivo N con la siguiente propiedad: existen enteros $x_1, \ldots, x_N$ tales que $x_i^2 - x_i x_j$ nunca es divisible por 1111, para cualesquiera $i \neq j$.
Solución. Observemos que $x_i^2 = x_i(x_i - x_j)$; de aquí está claro que ningún x_i puede ser múltiplo de 1111 ni puede haber dos que den el resto módulo 1111. Es suficiente pues trabajar con los números en $[1, 1110]$; de estos, hay 1000 coprimos con 1111; 100 que son múltiplos de 11 y 10 que son múltiplos de 101. Si tomamos los 1000 coprimos con 1111 entonces x_i será coprimo con 1111 y $x_i - x_j$ nunca podrá ser múltiplo de 1111. Así pues $N \geq 1000$.
Supongamos que es posible una elección mejor en la que hay a múltiplos de 11 y b múltiplos de 101. Un múltiplo de 11, digamos m, prohibe la elección de cualquiera congruente (módulo 1111) con $m+101s$, ya que en este caso pasaría que $m\cdot(m+101s-m)$ es múltiplo de 1111. Estas prohibiciones son disjuntas ya que $m+101s \equiv m' = 101s'$ implicaría que $m-m' \equiv 101(s-s')$ y como $m-m'$ es múltiplo de 11 si lo fuese también de 101 pasaría que m y m' son congruente módulo 1111. De esta manera, por cada múltiplo de 11 tengo 10 prohibiciones entre los coprimos con 1111; del mismo modo, por cada múltiplo de 101 tengo 100 prohibiciones, que ahora sí podrían solaparse con las anteriores. En cualquier caso, el número de prohibiciones es mayor o igual que

$$\text{máx}\{10a, 100b\} \geq \frac{10a + 100b}{2} = 5a + 50b,$$

y solo podría tomar

$$1000 - 5a - 50b + a + b = 1000 - 4a - 49b \leq 1000,$$

con igualdad si y solo si $a = b = 0$. De esta manera, $N = 1000$ y la única manera de asegurar esa cota es tomando 1000 números coprimos con 1111 que den un resto diferente.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Supongamos que sus divisores positivos se pueden dividir en parejas disjuntas de manera que la suma de cada pareja es un número primo. Probar que estos primos son todos distintos y que ninguno divide a n.
Solución. Notemos que los dos números de una pareja (d_1, d_2) han de ser coprimos, ya que si $p|d_1$ y $p|d_2$, entonces $p < d_1 + d_2$ pero p divide a la suma, así que es un producto de p por otros factores mayores que 1; así pues $d_2 \leq n/d_1$, porque hemos de "quitar" los factores de d_1. Entonces, $d_1 d_2 \leq n$. Ahora bien, si hay $2t$ parejas, al hacer el producto de los $2t$ números estos se pueden agrupar en parejas de la forma $(d, n/d)$ con lo cual ese producto es n^t; por otra parte, había de ser menor o igual que n^t, y la igualdad se da si y solo si en cada una de nuestras parejas $d_2 = n/d_1$.
Hemos visto por tanto que las parejas son del tipo $\left(d, \frac{n}{d}\right)$. Si

$$d + \frac{n}{d} = d' + \frac{n}{d'}$$

llegamos a

$$(d - d')(n - dd'),$$

con lo que o bien $d' = d$ o bien $d' = n/d$ y las parejas son iguales.
Supongamos ahora que $d + n/d = p$ y que $p|n$; entonces, si ponemos $d^2 + n = pd$ pasará que $p|d$ y también que $p|(n/d)$, con lo que los números d y n/d no serían coprimos,

lo que contradice nuestra primera afirmación.

Problema 3. Un círculo ω pasa a través de los vértices B y C de un triángulo ABC. Además, ω corta al segmento AC en $D \neq C$ y al segmento AB en $E \neq B$. En la semirrecta que empieza en B y lo une con D se encuentra un punto K de manera que $BK = AC$ y en la semirrecta que empieza en C y lo une con E se encuentra un punto L tal que $CL = AB$. Probar que el circuncentro O del triángulo AKL se encuentra en ω.

Problema 4. Dado un triángulo ABC con incentro I y circuncírculo Γ, sea D el corte de AI con Γ. Sea E un punto en el arco BDC y F un punto en el segmento BC, de manera que $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Si G es el punto medio de IF, probar que el corte de EI con DG está sobre Γ.
Solución. Sea $T = EI \cap DG$; si probamos que $\angle DTI = \angle DAE$ son iguales habremos acabado. Alternativamente, podemos ver que DIT es semejante a EIA o que $\angle DTI \angle IEA$. Sea I' el simétrico de I respecto de D; de esta manera, como DG será paralelo a $I'F$ podemos que $\angle AI'F = \angle AEI$ o que AFI' es semajante a AEI. Sabemos que $\angle FAI = \angle IAE$ así que es suficiente con establecer que

$$AI \cdot AI' = AE \cdot AF.$$

Ahora bien, ABF es semejante a AEC por lo que $AE \cdot AF = AB \cdot AC$. Ahora se puede concluir con geometría métrica, ya que es conocido que I' es el exincentro (el centro del círculo tangente al lado BC y a las prolongaciones de AB y AC). Es conocido que

$$AI = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}, \qquad AI' = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}},$$

y hemos acabado.

Problema 5. Encontrar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

Solución. Vamos a sustituir $x = y = 0$; resultará entonces que

$$f(0)\Big(1 - \lfloor f(0) \rfloor\Big) = 0,$$

con lo que vamos a distinguir dos casos:

- Si $f(0) = 0$, ponemos ahora $x = y = 1$, con lo que resulta que

  $$f(1)\Big(1 - \lfloor f(1) \rfloor\Big) = 0$$

  y nuevamente hay dos opciones: si $f(1) = 0$ entonces poniendo $x = 1$ resulta que $f(y) = 0$ para todo y real, y obtenemos efectivamente la solución constante 0; si $\lfloor f(1) \rfloor = 1$ lo primero que observamos poniendo $y = 1$ es que $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$ con lo que si ahora ponemos $x = 2$, $y = 1/2$ tendremos que $f(1) = f(2)\lfloor f(1/2) \rfloor = f(2) \cdot f(0) = 0$, y esto es una contradicción.

- Si $\lfloor f(0) \rfloor = 1$ tomamos $y = 0$ con lo que resulta $f(0) = f(x)$ y la función es constante (e igual a un cierto valor k). Necesariamente ha de ser $\lfloor f(0) \rfloor = 1$ con lo que probando nos queda que $k = k\lfloor k \rfloor$ y dado que $k \neq 0$ se puede dividir por k y obtenemos que cualquier $k \in [1, 2)$ funciona.

Problema 6. Probar que

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

siendo x, y, z reales positivos.
Solución. Realizamos el cambio de variable $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, donde ahora a, b, c son los lados de un triángulo. Obtenemos por tanto que el enunciado es equivalente a

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2,$$

y ahora nos damos cuenta que el lado derecho es igual a

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

(este recuerdo surge de que es lo que nos encontramos al desarrollar la fórmula de Herón). Notamos también que cada factor es positivo.
Cambiando nuevamente $r = \sqrt{b}+\sqrt{c}$, $s = \sqrt{c}+\sqrt{a}$ y $t = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ tenemos que llega con que ver que

$$(r+s)(s+t)(t+r) \geq 8rst,$$

lo cual es trivialmente cierto por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, ya que $r+s \geq 2\sqrt{rs}$, y similarmente para las otras variables.

Problema 7. Sobre una línea l hay tres puntos diferentes, A, B, P (en este orden). Sea a la recta por A perpendicular a l, y sea b la recta por B perpendicular a l. Una recta por P, que no coincide con l, corta a la recta a en Q y a la recta b en R. La recta que pasa por A y es perpendicular a BQ corta a BQ en L y a BR en T. La recta que pasa por B y es perpendicular a AR corta a AR en K y a AQ en S.

- Probar que P, T, S están alineados.
- Probar que P, K, L están alineados.

Solución. Empezamos observando que A, B, K, L son concíclicos ya que $\angle AKB = \angle ALB = 90$. Además se encuentran en la circunferencia de diámetro AB, con lo que AS y BT son tangentes.
Vamos a aplicar el teorema de Pascal al hexágono (degenerado) $AABBLK$; si $P' = AB \cap KL$, entonces P' está alineado con Q y R; dicho de otra manera, AB, KL y QR concurren, y como P está en AB y en QR ha de pasar que P, K, L estén alineados, lo que prueba el segundo apartado.
Si usamos ahora el teorema de Pascal con el hexágono $AALKBB$ obtendremos que S, P, T están alineados, y eso prueba el primer apartado.

Problema 1. En la cena de verano de olímpicos y exolímpicos participan n personas ($n \geq 2018$). Es conocido que cada uno es amigo de por lo menos 2017 personas más (la amistad es siempre recíproca). Probar que es posible colocar a al menos 2018 personas en círculo para bailar una sardana, de forma que cada uno de los que participe en el baile esté colocado entre dos amigos suyos.
Solución. Sea a_1 una persona al azar. Seleccionamos a_2 entre sus amigos (es un conjunto no vacío); de la misma manera, definimos $a_3, a_4, \ldots, a_{2018}$ para que cada uno sea amigo del anterior, ya que como cada a_i tiene al menos 2017 amigos siempre será posible escoger uno nuevo entre aquellos que no han aparecido. Si a_{2018} fuese amigo de a_1 habríamos acabado porque se cerraría el círculo; en caso contrario, tomamos una nueva persona a_{2019}, e iteramos el proceso, ya que ahora si a_{2019} es amigo de a_1 o de a_2 también se concluye. En general, cuando consideramos a_k, si es amigo de alguno de los $a_1, a_2, \ldots, a_{k-2017}$ se ha acabado; en caso contrario, como solo hay 2016 posibilidades de amistad entre los precedentes, ha de tener un amigo nuevo que incorporamos, a_{k+1}. Pero este proceso necesariamente acaba dado que hay un número finito de asistentes y en algún momento se cerrará el círculo.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con $AC/BD = k$. Las bisectrices de los ángulos formados por AC y BD cortan a los lados del paralelogramos en K, L, M, N. Encontrar la razón entre las áreas de $KLMN$ y $ABCD$.
Solución. Suponemos que $K \in AB; L \in BC; M \in CD; N \in DA$; entonces, si el punto de corte de las diagonales es P, por el teorema de la bisectriz resulta que

$$k = \frac{PA}{PB} = \frac{AK}{KB}, \qquad \frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PA} = \frac{DN}{NA},$$

y por consiguiente

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AN}{ND},$$

con lo que por el teorema de Tales NK es paralela a BD; del mismo modo, KL es paralela a AC, ML a BD y MN a AC. Para calcular el área del cuadrilátero, hallaremos la de los triángulos AKN, BKL, CLM y DMN y se la restaremos a la del paralelogramo inicial. Ahora bien,

$$\frac{AB}{AK} = 1 + \frac{BK}{AK} = 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

por lo que

$$\frac{[AKN]}{[ABCD]} = \frac{[AKN]}{2[ABD]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2}.$$

Una cuenta análoga muestra que

$$\frac{[BKL]}{[ABCD]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Resultados análogos se cumplen para $[NMD]$ y $[CML]$. Finalmente, la suma del área de los triángulos es

$$[ABCD] \cdot \frac{k^2+1}{(k+1)^2},$$

con lo que la proporción pedida será

$$1 - \frac{k^2+1}{(k+1)^2} = \frac{2k}{(k+1)^2}.$$

Problema 3. Sean a, b, c reales positivos de manera que $a + b + c = 3$. Probar que

$$\frac{1}{2+a^2+b^2} + \frac{1}{2+b^2+c^2} + \frac{1}{2+c^2+a^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Solución. El enunciado es equivalente a

$$\frac{2}{2+a^2+b^2} + \frac{2}{2+b^2+c^2} + \frac{2}{2+c^2+a^2} \leq \frac{3}{2}.$$

y a

$$\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{2+b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{2+c^2+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy (en forma Engel), el lado izquierdo es mayor o igual que

$$\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2}{2(a^2+b^2+c^2+3)}.$$

Por consiguiente, si probamos lo siguiente habremos acabado

$$2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} \geq a^2+b^2+c^2+9.$$

El problema es que esta desigualdad no está homogeneizada, con lo que vamos a forzar que todo sea de grado 2 poniendo $9 = (a+b+c)^2$, y por tanto nos llega con ver que

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} \geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Ahora bien, observemos que

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} \geq b^2+ca,$$

lo cual se comprueba simplemente elevando al cuadrado, porque es equivalente a

$$b^2(c^2+a^2) \geq b^2(2ca),$$

que es inmediato por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Escribiendo desigualdades análogas para las otras expresiones, se llega al resultado pedido.

Problema 4. Sea f una función de los enteros a los enteros positivos. Supongamos que, para dos enteros m, n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Probar que, para todos los enteros m, n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 5. El círculo Γ está inscrito en un triángulo escaleno ABC. Γ es tangente a BC, CA, AB en D, E, F, respectivamente. La línea EF corta a BC en G. El círculo de diámetro GD corta a Γ en R (con $R \neq D$). Sean P, Q (ambos distintos de R) las intersecciones de Γ con BR y CR, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. El circuncírculo de CDE corta a QR en M, y el circuncírculo de BDF corta a PR en N. Probar que PM, QN y RX concurren.
Solución. Comenzamos observando que $(B, C; D, G)$ es una cuaterna harmónica, con lo que B va a parar a C al considerar una inversión con respecto al círculo de diámetro GD, o dicho de otra manera, si T es el punto medio de GD entonces $TB \cdot TC = TD^2 = TR^2$ (esto lo vimos al hablar de proyectiva). Entonces TR es tangente al circuncírculo de

BCR y $\angle TRB = \angle RCB$. Del mismo modo, como $TD = TR$ y TD es tangente a Γ TR también lo será, con lo que $\angle TRB = \angle RQP$. Por tanto, PQ es paralela a BC. Aplicando Ceva a PQR con las cevianas RX, PC y QB concluimos por Tales que RX corta a PQ en su punto medio. Por Ceva nuevamente, ahora aplicado a las cevianas PM, QN y RX nos queda que el enunciado equivale a ver que MN es paralela a PQ (o a BC). Para eso, veremos que M es el punto medio de QR: como $\angle IEC = \angle IDC = \pi/2$, los puntos D, C, E, M, I son concíclicos y se tiene que $\angle IMC = \angle IEC = \pi/2$. Por tanto, IM es perpendicular a RQ, pero RQ es una cuerda de Γ, cuyo centro es I, y la perpendicular desde el centro a una cuerda cae en el punto medio, que era lo que queríamos.

Problema 6. Tenemos inicialmente seis cajas $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, cada una con una moneda. Las siguientes operaciones están permitidas:

- **Tipo 1:** escoger una caja no vacía C_j, con $1 \leq j \leq 5$, sacar una moneda de C_j y añadir dos a C_{j+1}.
- **Tipo 2:** escoger una caja no vacía C_k, con $1 \leq k \leq 4$, sacar una moneda de C_k e intercambiar los contenidos de las cajas C_{k+1} y C_{k+2}.

Determinar si existe una secuencia finita de operaciones que use los tipos permitidos y de manera que las cinco primeras cajas se queden vacía y que en la última, C_6, haya $2010^{2010^{2010}}$ monedas.

Solución. La idea principal para resolver el problema es que podemos "generar" dinero muy rápido. En particular, de una configuración $(a, 0, 0)$ se puede pasar a una $(0, 2^a, 0)$. Para $a = 1, 2$ es trivial; si $a = 3$, del $(3, 0, 0)$ paso al $(1, 4, 0)$ y de aquí al $(1, 0, 8)$, que puedo convertir con el tipo 2 al $(0, 8, 0)$. En general, del $(a, 0, 0)$ paso (por inducción) al $(1, 2^{a-1}, 0)$, de aquí al $(1, 0, 2^a)$ y de aquí finalmente al $(0, 2^a, 0)$.

Pero no solo eso, del $(a, 0, 0, 0)$ se puede pasar al $(0, P_a, 0, 0)$, siendo P_a una torre de a doses; por ejemplo, $P_1 = 2$, $P_2 = 2^2 = 4$, $P_3 = 2^{2^2} = 16$, $P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65356$ y así sucesivamente. Esto se ve nuevamente por inducción, ya que del $(a, 0, 0, 0)$ pasamos al $(1, P_{a-1}, 0, 0)$, de aquí al $(1, 0, 2^{P_{a-1}}, 0) = (1, 0, P_a, 0)$ y finalmente llegamos al $(0, P_a, 0, 0)$.

De la configuración inicial se llega a $(0, 3, 0, 0, 0, 0)$, de aquí al $(0, 0, 16, 0, 0, 0)$ y de aquí a $(0, 0, 0, P_{16}, 0, 0)$. Ahora bien,

$$P_{16} > 2010^{2010^{2010}}.$$

Esto se puede ver simplemente teniendo en cuenta que $P_4 > 2010$, ya que entonces

$$P_{16} > P_{12}^{2010} > P_8^{2010^{2010}} > 2010^{2010^{2010}}.$$

Ahora vamos sacando una a una las monedas que hay en exceso aplicando el tipo 2, porque intercambiar las cajas 5 y 6 deja todo igual salvo que me reduce en uno la cantidad en la caja 4. Podemos conseguir que queden en la caja 4 un total de $2010^{2010^{2010}}/4$ monedas y luego aplicamos dos veces el tipo 1.

Problema 7. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de enteros, donde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, a cada uno de sus subconjuntos le asociamos la suma de sus elementos (para el conjunto vacío será 0). Si todas las sumas tienen restos diferentes módulo 2^n diremos que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es n-completo. Determinar, para cada n, el número de conjuntos n-completos.

Problema 8. Determinar si existe una sucesión estrictamente creciente de enteros $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, de manera que cumple simultáneamente estas dos condiciones:

- Todo número natural se puede escribir como suma de dos términos (no necesariamente distintos) de la sucesión.
- Para cada entero positivo n, se cumple que $a_n > \frac{n^2}{16}$.

Problema 1. Sea A_1 el punto diametralmente opuesto al vértice A del triángulo ABC en su circunferencia circunscrita, y sea A' el punto en el que AA_1 corta al lado BC. La perpendicular a AA' trazada por A' corta a los lados AB y AC (o a sus prolongaciones) en M y N, respectivamente. Demostrar que A, M, A_1 y N están en una circunferencia cuyo centro se encuentra en la altura desde A en el triángulo ABC.
Solución. Observemos que $\angle A'AC = 90 - \beta$, y de aquí $\angle ANM = \beta$, $\angle AMN = \gamma$. Por tanto, MN y BC son antiparalelas y $AB \cdot AM = AN \cdot AC$. Por tanto, podemos aplicar una simetría en torno a la bisectriz del ángulo A seguida de una homotecia de razón

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM},$$

que convierte MN en BC. En particular, usando el teorema del seno primero en $AA'N$ y luego en $AA'C$,

$$\frac{AB}{AN} = \frac{c \sin \beta}{AA'} = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} \sin(90 + \beta - \gamma) = \sin(90 + \beta - \gamma).$$

Sea T el punto de corte de la altura con el circuncírculo, que es el simétrico del ortocentro respecto del lado BC. La recta AA_1 va a parar a la altura, así que llegará con probar que A_1 va a T, o lo que es lo mismo

$$\frac{AT}{AA_1} = \sin(90 + \beta - \gamma).$$

Para eso usamos trigonometría, ya que

$$\frac{AT}{AA_1} = \frac{c \sin(90 + \beta - \gamma)}{2R \sin(\gamma)} = \sin(90 + \beta - \gamma).$$

Ahora claramente tenemos que A, B, C, T son concíclicos con centro O; por tanto, A, N, M, A_1 son concíclicos con centro sobre la simétrica de la recta AA_1, que es la altura desde A, como se quería.

Problema 2. Consideremos un triángulo acutángulo ABC con $AB < AC$ y sea ω su circunferencia circunscrita. Sean t_B y t_C las tangentes a ω en B y C, respectivamente, y sea L su intersección. La recta que pasa por B y es paralela a AC corta a t_C en D; la recta por C paralela a AB corta a t_B en E. El circuncírculo de BDC corta a AC en T (T situado entre A y C), y el circuncírculo de BEC corta a la recta AB en S (con B entre S y A). Probar que ST, AL y BC concurren.
Solución. La clave es observar que BT es paralela a SC. Para ello,

$$\angle BSC = \angle BEC = \pi - \alpha - \beta = \gamma;$$

si vemos que $\angle BTC = 180 - \beta$ habremos acabado, o lo que es lo mismo $\angle BDC = \beta$, pero

$$\angle BDC = \pi - \gamma - \alpha = \beta,$$

como se quería.
Sabemos que AL es una simediana de ABC y por tanto, como SC es antiparalela a BC, con la usual simetría a través de la bisectriz de $\angle BAC$, tenemos que AL biseca al segmento SC. De esta manera, usando el teorema de Ceva en ASC con las cevianas CB, AL y ST, nos llega con ver que

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AT}{TC},$$

pero esto es cierto porque sabemos ya que BT y SC son paralelas.

Problema 3. Dado un cuadrilátero cíclico $ABCD$, sea E el punto de corte de las diagonales AC y BD y sea F el corte de AD y BC. Los puntos medios de AB y CD son G y H, respectivamente. Probar que EF es tangente en E al círculo que pasa por E, G, H.

Solución. El enunciado es equivalente a ver que $\angle FEG = \angle EHG$. Como $FA \cdot FD = FB \cdot FC$, podemos aplicar una simetría en torno a la bisectriz de $\angle AFB$ seguida de una homotecia de factor

$$\frac{FD}{FB} = \frac{FC}{FA},$$

que nos llevará el punto A a C y el punto B a D (y el punto medio G al punto medio H). Sea C' la imagen de C; entonces CC' es paralela a BD, porque

$$\angle C'CF = \angle CAF = \pi - \angle DAC = \pi - \angle DBC = \angle DBF.$$

Del mismo modo, si D' es la imagen de D, DD' es paralela a AC. Por tanto, si X es la imagen de E, entonces $EDXC$ es un paralelogramo, y como H es el punto medio de CD, también lo es de EX.

Un argumento simétrico pero haciendo ahora la simetría seguida de la homotecia que envía CD a AB nos da que la imagen de E, que ahora llamaremos Y, es tal que G es el punto medio de EY. Por último, F, X, Y están alineados por construcción.

De esta manera, $\angle EHG \angle EXF$. Por otra parte, si miramos la imagen de EFG por la primera transformación, nos queda que $\angle FEG = \angle FXH = \angle FXE$, lo que concluye la demostración.

Problema 0. Encontrar todos los pares ordenados de enteros positivos (x, y) tales que

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

Problema 1. Sea $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Probar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Sean a, b, c números reales positivos de forma que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Probar que

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro de ADC. Supongamos que $\angle BEK = \pi/4$. Determinar los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 4. Un comité de 3366 críticos cinematográficos está votando para los Goya. Cada crítico elige a un actor y a una actriz. Después de la votación, se vio que para cada entero positivo $1 \leq n \leq 100$ hay algún actor o actriz que fue votado exactamente n veces. Probar que hay dos críticos que votaron al mismo actor y a la misma actriz.

Problema 5. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Los puntos P y Q están en el interior de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L, M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y sea Γ el círculo que pasa por K, L y M. Supongamos que la recta PQ es tangente a Γ. Probar que $OP = OQ$.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo y H su ortocentro. Consideramos los puntos D, intersección de BH con AC, y E, intersección de CH con AB. Los circuncírculos de ABC y ADE se cortan en los puntos A y F. Probar que las bisectrices interiores de BFC y BHC se cortan sobre BC.

Problema 2. Un entero positivo N es equilibrado si $N = 1$ o si se puede escribir como producto de un número par de primos (no necesariamente distintos). Dados enteros positivos, consideramos el polinomio $P(x) = (x + a)(x + b)$.

1. Prueba que existen enteros positivos a, b tales que todos los números $P(1), P(2), \ldots P(50)$ son equilibrados.

2. Prueba que si $P(n)$ es equilibrado para todo n entonces $a = b$.

Problema 3. Sea λ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 2017t - 1 = 0$. Definimos recursivamente la sucesión (x_n) de la forma $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \lfloor \lambda x_n \rfloor$ para $n = 1, 2, \ldots$ Encontrar el resto de dividir x_{2017} entre 2017.

Problema 4. Supongamos que 1000 niños están sentados en torno a una mesa circular. Probar que existe un entero k tal que $100 \leq k \leq 300$ y de manera que en el círculo hay un grupo de $2k$ estudiantes dispuestos de manera consecutiva, y de manera que la primera mitad contiene el mismo números de niñas que la segunda mitad.

Problema 1. Sea ABC un triángulo y AD una de las bisectrices interiores (con D sobre el lado BC). Una línea l es tangente a los circuncírculos de ADB y ADC en los puntos M y N, respectivamente. Prueba que l es también tangente al círculo que pasa por los puntos medios de BD, DC y MN.

Problema 2. Prueba que para todo entero positivo n se verifica que

$$\frac{\sigma(1)}{1} + \frac{\sigma(2)}{2} + \ldots + \frac{\sigma(n)}{n} \leq 2n.$$

Problema 3. Un subconjunto M de $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$ no contiene tres elementos cuyo producto es un cuadrado perfecto. Hallar el máximo número de elementos que puede haber en M.

Problema 4. Tenemos un montón con 2017 piedras. Joan y Sílvia juegan por turnos (quizás ya por última vez en la vida) siguiendo estas normas:

1. En cada turno, el jugador puede sacar $1, 2, 3, 4$ o 5 piedras del montón.
2. En cada turno, el jugador no puede sacar exactamente la misma cantidad de piedras que el jugador que realizó el movimiento anterior.

Pierde el jugador que no puede realizar un movimiento válido. Si Joan empieza, ¿quién tendrá la estrategia ganadora?

Problema 5. Sea $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, y sea $f : S \to S$ un función biyectiva diferente de la identidad. Sea $u = \sum_{k=1}^{n} |f(k) - k|$ y sea v el número de pares ordenados (a, b) de elementos de S tales que $a > b$ y $f(a) < f(b)$. Probar que $v < u \leq 2v$, y que $u = 2v$ si y solo si no existen enteros positivos $a > b > c$ tales que $f(a) < f(b) < f(c)$.