Problemes sobre derivades parcials i direccionals

Problema 1. Calculeu les derivades parcials de les funcions següents en un punt arbitrari del seu domini:

(a) $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$**.**

(b) $h(x,y,z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, \sqrt{1-z^2-x^2}, \sqrt{1-x^2-y^2})$**.**

(c) $v(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2$**.**

Solució. Noti's que per trobar una derivada parcial en un punt és suficient suposar que totes les variables excepte aquella respecte la qual es deriva són constants. Això ens permet treballar aplicant les mateixes regles de derivació que en el càlcul en una variable.

(a)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2-y^2) - 2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4yx^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

(b) En aquest cas tenim una funció vectorial; aleshores, la derivada parcial respecte a x (i el mateix passa amb les altres variables) tindrà tres components:
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \Big(0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big),$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \Big(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}, 0, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Big),$$
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \Big(-\frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}, 0\Big).$$

(c)
$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = 1 + 2x_i.$$

Problema 2. Donada $f(x,y) = y + x^{(\log x)(\arctan(\sin(\cos xy)))}$**, calculeu** $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$**.**

Solució. Com a l'apartat anterior, trobar la derivada en la direcció y al punt $(1,1)$ vol dir fixar $x = 1$ i considerar que l'única variació que es produeix és en la variable y. D'aquesta manera, el segon sumand és constant (per tractar-se d'una exponencial de base 1) i tenim que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1.$$

Els problemes 3 i 4 us demanen trobar les derivades direccionals de diferents funcions, emprant per a això les definicions. Us recomanem que proveu de fer-los per vosaltres mateixos, i no dubteu de preguntar qualsevol dubte que tingueu! Discutirem aquí la resolució detallada del problema 5, molt semblant als dos anteriors.

Problema 5. Estudieu la continuïtat i l'existència de derivades direccionals a $\mathbb{R}^2$ **de la funció**
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \textbf{si } y \neq 0; \\ 0 & \textbf{si } y = 0. \end{cases}$$

Solució. Pel que fa la continuïtat, observem que f és una funció contínua al conjunt obert $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$, per ser quocient de dos funcions polinòmiques de manera que el denominador no s'anul·la en cap punt de l'obert.
Considerem ara un punt de la forma $(x_0, 0)$, amb $x_0 \neq 0$. Si prenem la restricció de la funció a la recta vertical (x_0, y), tenim que el límit en $(x_0, 0)$ serà infinit (i el signe dependrà de la banda per la que ens apropem). Per tant, la funció no pot ser contínua (el seu valor a $(x_0, 0)$ és 0). Per últim, al punt $(0, 0)$ podem prendre el límit al llarg de la paràbola $y = x^2$. Aleshores

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = 1,$$

i la funció tampoc no és contínua en aquest punt.
Passem ara a estudiar l'existència de derivades direccionals. Comencem amb un punt $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, és a dir, amb $y_0 \neq 0$. Fixem la direcció donada pel vector $v = (v_1, v_2)$. Aleshores,

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{2x_0 y_0 v_1 - x_0^2 v_2}{y_0^2},$$

i per tant la derivada direccional existeix. Alternativament, observi's que prendre la derivada direccional al llarg del vector (v_1, v_2) vol dir considerar la restricció a una recta que conté el punt i de manera que en un entorn seu la funció f (vista com a funció d'una variable!) és derivable per ser quocient de funcions derivables on el denominador no s'anul·la. Observi's també com la derivada direccional que hem calculat és combinació lineal de les dos parcials, la qual cosa és coherent amb el fet que f sigui diferenciable en aquest punt (això ho treballarem més endavant en aquest tema).
Considerem ara un punt de la forma $(x_0, 0)$, amb $(x_0 \neq 0)$. Consideri's la derivada direccional al llarg del vector $v = (v_1, v_2)$, on $v_1 \neq 0$. Aleshores,

$$D_v f(x_0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + tv_1)^2}{(tv_2) \cdot t},$$

i com que $x_0 \neq 0$ aquest límit no és finit al punt $(x_0, 0)$, ja que el denominador tendeix cap a 0 i el numerador ho fa cap a x_0^2. En canvi, la derivada direccional al llarg de $v = (v_1, 0)$ si existeix i val 0, perquè la restricció de la funció f a l'eix horitzontal és idènticament nul·la. Per últim prenem el punt $(0, 0)$ i consideri's novament la derivada direccional al llarg del vector $v = (v_1, v_2)$, on $v_1 \neq 0$. En aquest cas,

$$D_v f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{(tv_1)^2}{(tv_2) \cdot t} = \frac{v_1^2}{v_2},$$

i el límit existeix. Pel mateix motiu d'abans, la derivada direccional al llarg de $v = (v_1, 0)$ si existeix i val 0. Això és coherent amb el fet que la restricció de f a qualsevol recta que passi per l'origen és contínua tot i que la funció no ho sigui. Com es veu doncs, l'existència de totes les derivades direccionals en un punt no garanteix la continuïtat.

Problema 6. Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ obert i $f : D \to \mathbb{R}$ tal que les seves derivades parcials existeixen i estan fitades en D. Demostreu que $f(x, y)$ és contínua en D. És cert a $\mathbb{R}^m$, per $m > 2$?

Solució. Denoti's per M la fita per a les derivades parcials. Sigui $(x_0, y_0) \in D$ un punt arbitrari del domini. Veurem que el límit de $f(x, y)$ quan ens apropem al punt (x_0, y_0) existeix i satisfà

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Consideri's per a això la resta $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$. Fent servir la desigualtat triangular es té que

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|.$$

Ara bé, per a un cert x fixat podem considerar la funció d'una variable $g_x(y) = f(x, y)$, que sabem és derivable (la seva derivada és la parcial respecte la variable y). Tenim doncs que podem fer servir el teorema del valor mitjà en una variable, i això vol dir que

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| = |g_x(y) - g_x(y_0)| = |g'_x(\tilde{y})| \cdot |y - y_0|,$$

on $\tilde{y} = (\text{mín}(y_0, y), \text{máx}(y_0, y))$. Per tant, com que $g'_x(\tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y})$, es té que

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < M \cdot |y - y_0|.$$

De la mateixa manera, podem considerar ara la funció derivable $h_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, i novament fent servir el teorema del valor mitjà i després la fitació de les parcials, obtenim que

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| = |h_{y_0}(x) - h_{y_0}(x_0)| < M \cdot |x - x_0|.$$

Es conclou doncs que

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < M \cdot |x - x_0| + M \cdot |y - y_0|,$$

i com que el límit del costat dret quan (x, y) tendeix cap a (x_0, y_0) és zero, necessàriament tenim que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

com es volia veure.
Si $m > 2$ aquest mateix raonament també serveix, aplicant novament la desigualtat triangular per fitar la condició de continuïtat en termes de m sumands, on a cadascú d'ells $m-1$ variables són constants i només una es belluga. Això ens permet escriure-ho, fent servir el teorema del valor mitjà en una variable, com una derivada parcial (fitada) multiplicada per un factor que tendeix cap a 0.

Problemes sobre el concepte de pla tangent

Els problemes 15 i 16 estudien el concepte de pla tangent. Discutirem ara la resolució del problema 15 i us encoratgem a fer per vosaltres mateixos el problema 16 que fa servir les mateixes eines.

Donada $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $a \in A$, quan totes les rectes tangents a qualsevol secció vertical de la gràfica de f (a $\mathbb{R}^{n+1}$) estan en un mateix hiperplà es diu que aquest hiperplà és *l'hiperplà tangent a la gràfica de* f en el punt $(a, f(a))$. Si l'hiperplà tangent a la gràfica de f existeix, aleshores té equació

$$x_{n+1} = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i).$$

A teoria s'ha vist que si f és diferenciable en p, aleshores existeix hiperplà tangent a f en p.

Problema 15. Justifiqueu l'existència d'hiperplà tangent a les gràfiques de les funcions següents en el punt $(a, f(a))$ i calculeu-lo:

(a) $f(x, y, z) = y \arcsin(x \log y) + 2^{x/y}$**,** $a = (0, 1, 2)$**.**

(b) $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + xz^3$**,** $a = (4, -2, -1)$**.**

(c) $f(x, y, z) = x^{yz}$**,** $a = (e, e, 0)$**.**

Solució. Com s'ha dit abans, l'hiperplà tangent a una funció $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un punt $a = (a_1, a_2, a_3)$, si existeix, és una subvarietat de $\mathbb{R}^4$ que té per equació

$$t = f(a) + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big|_a (x - a_1) + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big|_a (y - a_2) + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big|_a (z - a_3).$$

Noti's que aquí hem fet servir les lletres (x, y, z, t) per denotar les variables de l'espai quatredimensional. Per tant, només caldrà justificar que les funcions són diferenciables als punts donats i trobar les derivades parcials corresponents.

(a) Observi's en primer lloc que f és diferenciable: com que $y > 0$, el logaritme és diferenciable, i en el punt a tenim que $|x \log y| \leq 1$, i per tant l'arc sinus també és diferenciable; el producte de diferenciables és diferenciable, i finalment la funció exponencial que surt al segon sumand té per denominador una funció diferenciable en un entorn del punt a ja que $y \neq 0$. Per tant, l'hiperplà tangent és

$$t = 1 + \log 2 \cdot x.$$

(b) Els polinomis són funcions diferenciables arreu. L'hiperplà tangent existeix i té equació

$$t = 8 + 3(x - 4) + -12(y + 2) + 24(z + 1) = -4 + 3x - 12y + 24z.$$

(c) Es tracta d'una funció diferenciable ja que és una exponencial on l'exponent és una funció diferenciable i la base també, i a més pren un valor positiu al punt a. Aleshores, l'hiperplà tangent està donat per l'equació

$$t = 1 + ez.$$

Indicació pel problema 16. Justifiqueu que la condició que us demanen és equivalent a que les dues parcials siguin zero. Això us portarà a un sistema de dues equacions amb dues incògnites que podeu resoldre fàcilment.

Problemes sobre la regla de la cadena

Els problemes 20-25 i 28 estudien la regla de la cadena. Oferim la solució de quatre d'aquests sets problemes i us recomanem que proveu de fer per vosaltres mateixos els tres restants (20, 22 i 23).

Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in A$, amb A obert i $G : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ diferenciable en $F(p) \in B$, amb B obert. Aleshores, $(G \circ F) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és diferenciable en p i per a tot $v \in \mathbb{R}^n$,

$$D(G \circ F)(p)(v) = DG(F(p))DF(p)(v).$$

Problema 21. Calculeu les derivades parcials D_1F, D_2F de les funcions compostes indicades.

(a) $F = f \circ g$**, amb** $f(x, y, z) = x^2y + y^2z - xyz$**,** $g(u, v) = (u + v, u - v, u)$**.**

(b) $F = f \circ g$**, amb** $f(x, y) = \frac{x+y}{1-xy}$**,** $g(u, v) = (\tan u, \tan v)$**.**

Solució.

(a) Observem que tant f com g són diferenciables ja que són funcions polinòmiques. Començarem per trobar la diferencial de la funció g, que és

$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la seva banda, la diferencial de f és

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy - yz & x^2 + 2yz - xz & y^2 - xy \end{pmatrix}.$$

Per la regla de la cadena, sabem que la diferencial de F vindrà donada per $Df(u+v, u-v, u) \circ Dg(u, v)$, amb la qual cosa i fent servir la notació matricial habitual, ens queda

$$\begin{pmatrix} u^2 + uv - 2v^2 & 2u^2 - uv + v^2 & -2uv + 2v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i efectuant el producte resulta

$$\begin{pmatrix} 3u^2 - 2uv + v^2 & -u^2 + 2uv - 3v^2 \end{pmatrix}.$$

Per tant $D_1F = 3u^2 - 2uv + v^2$ i $D_2F = -u^2 + 2uv - 3v^2$.

(b) Les funcions f i g són diferenciables en un obert (pel que fa la f, allà on $xy \neq 1$ i pel que fa la g allà on tant la tangent de u com la de v estiguin definides). De la mateixa manera que vam fer abans, tenim que

$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} \cos^{-2}(u) & 0 \\ 0 & \cos^{-2}(v) \end{pmatrix}$$

i

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2+1}{(1-xy)^2} & \frac{x^2+1}{(1-xy)^2} \end{pmatrix}.$$

Per tant, la diferencial de F serà

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(\cos v - \sin v \tan u)^2} & \frac{1}{(\cos u - \sin u \tan v)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^{-2}(u) & 0 \\ 0 & \cos^{-2}(v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(\cos v \cos u - \sin v \sin u)^2} & \frac{1}{(\cos u \cos v - \sin u \sin v)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^{-2}(u + v) & \cos^{-2}(u + v) \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, tenim doncs que $D_1F = D_2F = \cos^{-2}(u + v)$.

Problema 24. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Proveu que la funció $\phi(x, y) = f(2x+3y)$, definida en $\mathbb{R}^2$, satisfà l'equació en derivades parcials

$$3\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

Solució. Noti's que podem escriure $\phi = f \circ g$, on

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2x + 3y.$$

Aplicant la regla de la cadena ja que se satisfan les hipòtesis de diferenciabilitat, tenim que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2f'(2x + 3y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3f'(2x + 3y).$$

Amb aquestes expressions, tenim que

$$3\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2\frac{\partial \phi}{\partial y} = 6f'(2x + 3y) - 6f'(2x + 3y) = 0,$$

com es volia veure.

Problema 25. Sigui G la funció que dona el canvi de coordenades cartesianes a polars:

$$G : V = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

(a) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ expressada en coordenades cartesianes, obteniu les relacions entre les derivades parcials primeres en els dos sistemes de coordenades.

(b) Sigui $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ expressada en coordenades cartesianes

$$\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

i $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ G$, amb $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (f_1 \circ G, f_2 \circ G)$. Si

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

proveu que

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \phi} = -r\frac{\partial F_2}{\partial r}.$$

Solució.

(a) Primer de tot notem que la funció que dona el canvi de coordenades és diferenciables en el domini V. Observi's que partint de $F(r, \phi) = f(G(r, \phi))$ podem fer servir doncs la regla de la cadena. Per a això, observem que

$$DG(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix},$$

i aleshores

$$DF(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi & -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\phi.$$

Per trobar les altres relacions es procedeix de la mateixa manera invertint G, de manera que tenim una transformació

$$G^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to V$$

donada per

$$G^{-1} : (x,y) \mapsto \begin{cases} (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)) & \text{si } x>0 \text{ i } y>0 \\ (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)+2\pi) & \text{si } x>0 \text{ i } y<0 \\ (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)+\pi) & \text{si } x<0 \\ (y, \pi/2) & \text{si } x=0 \text{ i } y>0 \\ (y, 3\pi/2) & \text{si } x=0 \text{ i } y<0. \end{cases}$$

En aquest cas,

$$DG^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

i procedint de la mateixa manera que abans mitjançant la regla de la cadena es té que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial F}{\partial \phi}\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial F}{\partial \phi}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(b) Fent servir la regla de la cadena en forma matricial, tenim la següent igualtat de matrius:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Per una banda, tenim que

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial f_1}{\partial y}\sin\phi;$$

per l'altra, i fent servir les igualtats donades,

$$\frac{\partial F_2}{\partial \phi} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} r\sin\phi + \frac{\partial f_2}{\partial y} r\cos\phi = r\Big(\frac{\partial f_1}{\partial y}\sin\phi + \frac{\partial f_1}{\partial x}\cos\phi\Big) = r\frac{\partial F_1}{\partial r}.$$

La segona igualtat es prova de la mateixa manera comparant les altres dues components de la matriu.

Problema 28. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) = 0$ i $Df(x_0) \neq 0$. Trobeu un vector v de $\mathbb{R}^n$ tal que la funció $\phi(t) = f(x_0 + tv)$ sigui creixent en un entorn de l'origen.

Solució. Fent servir la regla de la cadena ja que se satisfan les hipòtesis, tenim que

$$\phi'(t) = Df(x_0)v.$$

En termes del vector gradient, podem dir que el que estem cercant és un vector v que satisfaci $\nabla f(x_0) \cdot v > 0$.
Com que $\nabla f(x_0)$ és no zero per hipòtesi, n'hi ha prou amb prendre un vector v que sigui 0 en totes les components excepte en una d'aquelles on el gradient no ho és; aleshores, en aquesta posem 1 si la corresponent coordenada del gradient és positiva i -1 altrament.

Miscel·lània

Els problemes 29-32 són una petita mostra d'algunes aplicacions dels resultats estudiats al llarg d'aquest tema. En particular, els problemes 29 i 30 repassen la fórmula de Leibniz que vau estudiar a l'assignatura de Càlcul en una variable; el problema 31 és una petita qüestió sobre el teorema del valor mitjà; i el 32 recorda el concepte de funció contractiva.

Problema 29. Considerem la funció $f(x,y) = \int_y^x e^{xyt}\,dt$. Calculeu $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ usant la fórmula de Leibniz. Comproveu el resultat calculant primer la integral i derivant després.

Solució. Fent servir la fórmula de Leibniz, es té que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_y^x yte^{xyt}\,dt + e^{x^2y} = \frac{xye^{x^2y} - y^2e^{xy^2}}{xy} - \frac{ye^{x^2y} - ye^{xy^2}}{x^2y^2} + e^{x^2y} =$$

$$= \frac{e^{x^2y}(2x^2y^2 - y) + e^{xy^2}(-xy^3 + y)}{x^2y^2}.$$

Procedint de la mateixa manera,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x^2y}(yx^3 - x) - e^{xy^2}(-2x^2y^2 + x)}{x^2y^2}.$$

Alternativament, resolent la integral es té que

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2y} - e^{xy^2}}{xy}.$$

Per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{x^2y}(2x^2y^2 - y) + e^{xy^2}(-xy^3 + y)}{x^2y^2}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x^2y}(yx^3 - x) + e^{xy^2}(-2x^2y^2 + x)}{x^2y^2}.$$

Problema 30. Donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, comproveu que la funció

$$\phi(x) = \int_0^x f(\xi)\sin(x - \xi)\,d\xi$$

satisfà $\phi''(x) + \phi(x) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Solució. Aplicar la fórmula de Leibniz per trobar primer $\phi'(x)$ i després $\phi''(x)$. En efecte,

$$\phi'(x) = \int_0^x f(\xi)\cos(x - \xi)\,d\xi,$$

ja que $f(x)\sin(0) = 0$. De la mateixa manera,

$$\phi''(x) = -\int_0^x f(\xi)\sin(x - \xi)\,d\xi + f(x) = -\phi(x) + f(x),$$

i d'aquí se segueix el resultat demanat.

Problema 31. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida per $F(t) = (t^2, t^3)$. Existeix algun valor $t_0 \in (0,1)$ tal que $F(1) - F(0) = DF(t_0) \cdot (1 - 0)$? Contradiu això el teorema del valor mitjà?

Solució. Tenim que la condició demanada s'escriu com

$$F(1) - F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_0 & 3t_0^2 \end{pmatrix} = DF(t_0) \cdot (1 - 0).$$

Això voldria dir que se satisfà, a la vegada $2t_0 = 1$ i $3t_0^2 = 1$, la qual cosa no és possible.
Això no contradiu el teorema del valor mitjà, que afirma que per a qualsevol vector $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, existeix un cert $t_0 \in (0, 1)$ de manera que

$$\langle u, (1, 1) \rangle = \langle u, (2t_0, 3t_0^2) \rangle.$$

És a dir,

$$u_1 + u_2 = u_1 \cdot 2t_0 + u_2 \cdot 3t_0^2$$

(i de fet es pot resoldre l'equació quadràtic i veure que aquest t_0 existeix). És a dir, el teorema del valor mitjà només és cert *coordenada a coordenada*.

Problema 32. Considerem els espais mètrics $(\mathbb{R}^n, d_1)$ i $(\mathbb{R}^m, d_2)$. Diem que una aplicació $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és *contractiva* si existeix $k \in (0, 1)$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y), \qquad \textbf{per a tot } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Donats a, $b \in \mathbb{R}$, proveu que la funció

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(x, y) = \Big(\frac{\cos y}{3} + a, \frac{\cos x}{3} + b \Big)$$

és contractiva.

Solució. Agafem dos punts (x, y) i (x', y') i fitarem $d_2(\mathbf{f}(x, y), \mathbf{f}(x', y'))$. Aquesta distància estàra donada per

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\cos y - \cos y')^2 + (\cos x - \cos x')^2}.$$

Ara bé,

$$|\cos y - \cos y'| = 2 \Big| \sin \Big(\frac{y + y'}{2} \Big) \Big| \cdot \Big| \sin \Big(\frac{y - y'}{2} \Big) \Big| \leq 2 \Big| \sin \Big(\frac{y - y'}{2} \Big) \Big| \leq |y - y'|.$$

Per tant

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\cos y - \cos y')^2 + (\cos x - \cos x')^2} \leq \frac{1}{3} \sqrt{|y - y'|^2 + |x - x'|^2} \leq$$

$$\leq \frac{|y - y'| + |x - x'|}{3} = \frac{1}{3} d_1((x, y), (x', y')),$$

i per tant $\mathbf{f}$ és contractiva agafant per exemple $k = 1/3$.

Problemes sobre el teorema de Schwartz i derivades d'ordre superior

Els problemes 1-4 estudien aplicacions del teorema de Schwartz i serveixen per practicar el càlcul de derivades d'ordre superior.

Per resoldres aquests problemes, convé recordar el teorema de Schwartz. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert, i $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funció tal que $\partial f/\partial x_i$, $\partial f/\partial x_j$ i $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ existeixen en Ω, amb l'última contínua en $a \in \Omega$. Llavors, $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(a)$ també existeix i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Problema 1. Trobeu tots els punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

on

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \textbf{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \textbf{altrament.} \end{cases}$$

Solució. La funció $f(x, y)$ sabem que és de classe $\mathcal{C}^2$ a l'obert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ja que és el quocient de dos polinomis de manera que el denominador no s'anul·la a cap punt de l'obert. Per tant, pel teorema de Schwartz, sabem que a cap d'aquests punts pot passar la condició de l'enunciat. Només s'ha d'analitzar què passa al punt $(0, 0)$. En aquest cas, si $(x, y) \neq (0, 0)$ es té que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En particular, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ per a tot $y \neq 0$. Pel que fa la parcial a l'origen, podem veure que existeix emprant la definició, i en concret

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

ja que la funció és constant al llarg dels eixos. Es conclou doncs que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Per altra banda, si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

i per tant $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$. De la mateixa manera, per la definició es té que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i en conseqüència,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Per tant, totes dues derivades creuades difereixen al punt $(0, 0)$ (i en particular la funció no és de classe $\mathcal{C}^2$ en aquest punt).

Problema 2. Comproveu que les derivades creuades de segon ordre de la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin \frac{1}{y} & \textbf{si } y \neq 0 \\ 0 & \textbf{si } y = 0 \end{cases}$$

coincideixen a $(0,0)$, tot i que no es verifica la hipòtesi del teorema de Schwartz.

Solució. La funció $f(x,y)$ és de classe $\mathcal{C}^2$ a l'obert $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$ i a qualsevol punt d'aquest obert es té que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \sin\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\sin\frac{1}{y} - x\cos\frac{1}{y}.$$

Pel que fa els punts de la forma $(x,0)$, emprant la definició arribem a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{xy^2\sin\frac{1}{y}}{y} = \lim_{y\to 0} xy\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Per tant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y}}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0.$$

Noti's però que no se satisfan les hipòtesis del teorema de Schwartz, ja que la funció no és de classe $\mathcal{C}^2$. Més en concret, si $y \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y},$$

i el límit no existeix quan $(x,y)\to(0,0)$.

Problema 3. Sigui $G(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ el canvi a polars. Donada f de classe $\mathcal{C}^2$, sigui $F = f\circ G$. Si f_{ij} vol dir la derivada segona de f respecte x_i, x_j, demostreu que

$$(f_{xx} + f_{yy})\circ G = F_{rr} + \frac{1}{r^2}F_{\phi\phi} + \frac{1}{r}F_r.$$

Solució. Observi's que com que F és de classe $\mathcal{C}^2$, podem intercanviar l'ordre de les derivades parcials pel teorema de Schwartz i a més fer servir la regla de la cadena per relacionar les derivades de F amb les de f. Per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \phi} = \cos\phi\cdot\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \phi}.$$

Tornem a derivar ara un altre cop respecte de x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Big(\cos\phi\cdot\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \cos^2\phi\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial\phi} - \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}.$$

De la mateixa manera,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \phi} = \sin\phi\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \phi}.$$

Tornem a derivar ara un altre cop respecte de y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Big(\sin\phi\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \sin^2\phi\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial\phi} + \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}.$$

Sumant totes dues equacions, s'obté que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2},$$

com es volia veure.

El **Problema 4** es resol simplement aplicant la regla de la cadena, tenint en compte novament el comportament de les parcials creuades.

Problemes sobre el teorema de la funció implícita

Els problemes 17-28 estudien aplicacions del teorema de la funció implícita. En aquest recull presentem la solució detallada de cinc d'ells, i us encoratgem a intentar els altres vosaltres mateixos (i enviar-nos dubtes si hi ha alguna cosa que no veieu o per la qual necessiteu ajuda).

Enunciat del teorema de la funció implícita. Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, on $F \in \mathcal{C}^k(A)$ i $(x_0, y_0) \in A$, amb $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Suposi's $F(x_0, y_0) = 0$ i $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \neq 0$. Aleshores, existeixen oberts U i V, amb $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, i una funció $G \in \mathcal{C}^k(U)$

$$G : U \longrightarrow V \quad x \mapsto y = G(x)$$

de manera que $F(x, G(x)) = 0$ per a tot $x \in U$.

Motivació (prèvia als problemes). Anem a posar un exemple del tipus de problemes que resoldrem, en el cas més senzill (com ja heu treballat a teoria). Considerem el sistema lineal d'equacions compatible indeterminat donat per

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Òbviament, hi ha una solució trivial que és $(0, 0, 0)$, però no és l'única. No és gaire difícil veure que aquestes venen parametritzades per $(\lambda, -\lambda, 0)$, on $\lambda \in \mathbb{R}$. Hi ha doncs algunes preguntes naturals:

1. Podem expressar qualsevol solució en termes de la variable x, és a dir, fer que (y, z) siguin una funció de x? La resposta és sí: simplement posem $(y, z) = (-x, 0)$.

2. Podem fer-ho també canviant els papers de les variables, posant per exemple (x, y) en funció de z. Ara la resposta és no: la variable z sempre és zero per a qualsevol solució.

3. Quin és el fet que fa la diferència entre els dos casos anteriors? En el primer cas, teníem el sistema

   $$\begin{aligned} y + z &= -x \\ y + 2z &= -x, \end{aligned}$$

   on es té que la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és invertible. En canvi, en el segon cas tenim

   $$\begin{aligned} x + y &= -z \\ x + y &= -2z, \end{aligned}$$

   i la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no és invertible.

4. En el primer cas, com que (y, z) són funcions de x, podem trobar les derivades $\frac{\partial y}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial x}$. Mirant les expressions sabem que aquests valors són -1 i 0, però també es pot veure en termes de derivació implícita:

   $$\begin{aligned} 1 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 1 + \frac{\partial y}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

En aquest seguit de problemes tractarem qüestions semblants, però els nostres sistemes d'equacions ja no seran lineals. El teorema de la funció implícita garanteix que l'existència de funcions

implícites (poder aïllar unes variables en funcions d'altres) es pot estudiar linealitzant el sistema, és a dir, mirant només la matriu jacobiana. Això ens permetrà també determinar les derivades de les funcions implícites, i fent servir el que hem anomenat derivació implícita podrem analitzar també les derivades d'ordre superior d'aquestes funcions.

Problema 17. Considereu el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ x + yt &= 0. \end{aligned}$$

(a) Defineix implícitament funcions $z = g_1(x, y)$ i $t = g_2(x, y)$ al voltant del punt $(1, 1, -1, -1)$?

(b) Calculeu $\frac{\partial g_1}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(1, 1)$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(1, 1)$ i $\frac{\partial g_2}{\partial y}(1, 1)$ per derivació implícita.

(c) Calculeu explícitament g_1 i g_2 i comproveu directament els resultats de (b).

(d) Trobeu els polinomis de Taylor de segon grau de g_1 i g_2 centrats a $(1, 1)$.

Solució.

(a) Considerem la funció

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

donada per $f_1(x, y, z, t) = x - 2y - z$, $f_2 = x + yt$. Comprovarem que se satisfan les hipòtesis del teorema de la funció implícita.

- La funció $\mathbf{f}$ s'anul·la al punt $(1, 1, -1, -1)$ ja que

$$f_1(1, 1, -1, -1) = 1 - 2 - (-1) = 0 \quad \text{i} \quad f_2(1, 1, -1, -1) = 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

- La matriu de les derivades parcials corresponents al punt $(1, 1, -1, -1)$ és

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que és invertible.

Per tant, existeixen les funcions $g_1(x, y)$ i $g_2(x, y)$, i a més són de classe $\mathcal{C}^\infty$ ja que f_1 i f_2 ho són.

(b) Pel teorema de la funció implícita, la primera equació es pot escriure com

$$x - 2y - g_1(x, y) = 0,$$

i aquesta igualtat és certa en un entorn del punt $(1, 1)$. Prenent derivades respecte a x i a y, tenim que

$$1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0, \quad -2 - \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0.$$

De la mateixa manera

$$x + y g_2(x, y) = 0,$$

i per tant agafant derivades

$$1 + y\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0, \quad g_2(x, y) + y\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0.$$

D'aquí es conclou que

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(1, 1) = -2, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(1, 1) = -1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(1, 1) = 1.$$

(c) Operant en el sistema, tenim que

$$z = g_1(x, y) = x - 2y, \quad t = -x/y.$$

Per tant, s'obté directament que

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) = -2, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) = -1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) = 1.$$

(d) Agafem novament l'equació

$$x - 2y - g_1(x, y) = 0.$$

Podem derivar dos cops respecte la variable x, dos cops respecte la variable y, o un cop respecte a cadascuna. En qualsevol cas

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} = 0.$$

Consideri's ara

$$x + y g_2(x, y) = 0.$$

En aquest cas,

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} + y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial g_2}{\partial y} + y\frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = 0.$$

Fent les operacions, es conclou que

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = -2.$$

Per tant, les expansions corresponents són

$$P_2(g_1(x, y)) = -1 + (x - 1) - 2(y - 1)$$

i

$$P_2(g_2(x, y)) = -1 - (x - 1) + (y + 1) + (x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2,$$

on $P_2(g_i(x, y))$ denota el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció g_i.

Problema 19. Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} x - u - v &= 0 \\ y - u^2 - v^2 &= 0 \\ z - u^3 - v^3 &= 0. \end{aligned}$$

Trobeu els punts $p = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^5$ que compleixin les dues condicions següents:

(a) el sistema defineix funcions implícites diferenciables $z = f_1(x, y)$, $u = f_2(x, y)$, $v = f_3(x, y)$ al voltant de p.

(b) la derivada direccional de f_1 en (x_0, y_0) és màxima en la direcció del vector $(1, 0)$ i el valor d'aquesta derivada és 3.

Solució. Considerem la funció

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$$

donada per $g_1(x,y,z,u,v) = x-u-v$, $g_2(x,y,z,u,v) = y-u^2-v^2$ i $g_3(x,y,z,u,v) = z-u^3-v^3$. Observi's que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial z} & \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2u & -2v \\ 1 & -3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu és $2(v-u)$ i per tant les conclusions del teorema de la funció implícita seran certes per a tot punt $p = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ que satisfaci les tres equacions del sistema i que a més sigui tal que $u_0 \neq v_0$. Llavors, en aquests casos podrem garantir l'existència de funcions $z = f_1(x,y)$, $u = f_2(x,y)$ i $v = f_3(x,y)$.
Per trobar les derivades parcials, fem servir derivació implícita (directament en forma matricial, tot i que es pot fer com al problema anterior) i ens queda que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2u & -2v \\ 1 & -3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3uv & \frac{3}{2}(u+v) \\ -\frac{v}{u-v} & \frac{1}{2u-2v} \\ \frac{u}{u-v} & -\frac{1}{2u-2v} \end{pmatrix}$$

La derivada de f_1 és doncs $(-3uv, 3/2(u+v))$. Per a que sigui màxima en la direcció del vector $(1,0)$ i que el seu valor sigui 3, ha de passar per tant que $u+v=0$ i que $-3uv=3$. Les opcions són doncs $(u,v) = (1,-1)$ o bé $(u,v) = (-1,1)$. Això deixa com a opcions possibles pel punt p $(0,2,0,1,-1)$ i $(0,2,0,-1,1)$.

Problema 23. Sigui $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$, per a tot P tal que $F(P) = 0$.

- **(a) Raoneu que pot expressar-se $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$, $z = z(x,y)$ en un entorn de qualsevol punt (x,y,z) tal que $F(x,y,z) = 0$.**
- **(b) Proveu que, amb les notacions anteriors, $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -1$.**

Solució.

(a) Observi's que se satisfan les hipòtesis del teorema de la funció implícita: per una banda, $F(P) = 0$, i per una altra, les parcials corresponents no s'anul·len ja que $\frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$ (resp. les parcials de F respecte y i z). Tenim doncs que podem escriure $x = x(y,z)$ (resp. $y = y(z,x)$ i $z = z(x,y)$), on les funcions són de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Aplicant el teorema de la funció implícita, en un entorn del punt es té que

$$F(x(y,z), y, z) = 0,$$

i aleshores derivant respecte la variable z, se satisfà

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

i d'aquí se segueix que

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Per tant, aplicant el mateix raonament per trobar les altres tres parcials,

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -1,$$

tal i com es volia veure.

Problema 24. Considerem el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} tx^3 + xy^2 + y - \frac{25}{4}t^3 &= 0 \\ 3xy + t^2y^3 - 3x^2(t+1) - t + 3 &= 0. \end{aligned}$$

(a) Al voltant de quins punts solució del sistema, de la forma $(x, y, t) = (1, 0, t_0)$, el sistema defineix localment x, y com a funcions derivables de t.

Sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una corba parametritzada tal que $\gamma(0) = (1, 0)$, on les funcions $x(t)$ i $y(t)$ venen definides localment per l'anterior sistema d'equacions.

(b) Calculeu el vector tangent a la corba γ en $t = 0$.

(c) Donada $f(x, y) = x^2 - 2y + 3$, calculeu la derivada de la funció $f \circ \gamma$ a l'origen.

Solució.

(a) Primer de tot, requerim que el punt $(1, 0, t_0)$ sigui solució del sistema. Per tant, ha de passar a la vegada que $t_0 - 25/4t_0^3 = 0$ i que $-3(t_0 + 1) - t_0 + 3 = 0$, i això vol dir $t_0 = 0$. A més, s'ha de complir que la matriu de les derivades parcial corresponents

$$\begin{pmatrix} 3tx^2 + y^2 & 2xy + 1 \\ 3y - 6x(t+1) & 3x + 3t^2y^2 \end{pmatrix}$$

sigui invertible al punt $(1, 0, 0)$, la qual cosa és certa ja que el determinant hi val 6. Per tant, pel teorema de la funció implícita, existeixen funcions $x(t)$ i $y(t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ i de manera que qualsevol solució del sistema al voltant del punt es pot parametritzar com $(x(t), y(t), t)$.

(b) Aplicant derivació implícita en forma matricial al resultat anterior, es dedueix que el vector tangent està donat per

$$-\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Com que totes les funcions que hi surten són diferenciables, podem aplicar la regla de la cadena. La diferencial de f al punt $(1, 0)$ és $\begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$ i per tant

$$(f \circ \gamma)'(0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7/6 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/3.$$

Problema 27. Demostreu que, a prop del punt $(\sqrt{e}, 1/\sqrt{e})$, la corba d'equació

$$xy = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

és la gràfica d'una funció $f \in \mathcal{C}^\infty$. Té f un extrem local en $x = \sqrt{e}$?

Solució. Consideri's la funció

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto xy - \log(x/y).$$

En primer lloc observem que se satisfan les condicions del teorema de la funció implícita: per una banda,

$$\sqrt{e}\frac{1}{\sqrt{e}} - \log(e) = 0,$$

i per l'altra, es té que $\frac{\partial g}{\partial y} = x + 1/y$, que val $2\sqrt{e} \neq 0$ al punt. Això ens permet assegurar, pel teorema de la funció implícita, que al voltant del punt podem posar $y = f(x)$ de manera que

$$xf(x) - \log(x/f(x)) = 0,$$

on $f \in \mathcal{C}^\infty$ ja que g també és infinitament derivable. Al mateix temps, $\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{1}{x}$ que és 0 al punt i per tant, per derivació implícita, $f'(x)$ s'anul·la quan $x = \sqrt{e}$.
Per veure que és extrem local necessitem a més que $f''(x) \neq 0$. Considerem novament l'equació

$$xf(x) - \log(x/f(x)) = 0$$

i derivem dos cops. Llavors,

$$f(x) + xf'(x) - \frac{1}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$

i

$$2f'(x) + xf''(x) + \frac{1}{x^2} + \frac{f(x) \cdot f''(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} = 0.$$

Per tant,

$$\sqrt{e}f''(\sqrt{e}) + \frac{1}{e} + \frac{f''(\sqrt{e})}{\sqrt{e} \cdot e^{-1}} = 0,$$

d'on tenim que

$$f''(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2e^{3/2}},$$

i es conclou que la funció f presenta un màxim al punt.

Problemes sobre polinomis de Taylor

Els problemes 1-5 estudien el càlcul de polinomis de Taylor. Per facilitar la notació, escriurem $P_k(x_1,\dots,x_n)$ per referir-nos al polinomi de Taylor de grau k en les variables $x_1,\dots,x_n$, quan estigui clar la funció per a la qual es fa el càlcul i el punt que es considera per prendre el desenvolupament. Si aquest no fos el cas, per emfatitzar que es pren el polinomi de grau k de la funció f al voltant d'un punt p, posem $P_k(f,p,x_1,\dots,x_n)$.

Comencem per recordar el teorema de Taylor. Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$ i $p, q \in A$, on A és obert i el segment $\overline{pq}$ està contingut a A. Aleshores,

$$f(q) = f(p)+\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(p)(q_i-p_i)+\ldots+\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\Big)(p)\prod_{i=1}^{k}(q_{j_i}-p_{j_i})+R_k(p,q),$$

on $\lim_{q\to p}\frac{R_k(p,q)}{||q-p||^k}=0$.
A més, la fórmula del residu garanteix que existeix $q_0 \in \overline{pq}$ de manera que

$$R_k(p,q)=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{n}\Big(\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{k+1}}}\Big)(q_0)\prod_{i=1}^{k+1}(q_{j_i}-p_{j_i}).$$

Problema 1 (alguns apartats). Trobeu els polinomis de Taylor de grau $\leq k$ centrats a p de les següents funcions.

(a) $f(x,y,z)=xyz$, $k\in\mathbb{N}$, $p=(1,-1,0)$.

(d) $f(x,y)=e^x\cos y$, $k=4$, $p=(0,0)$.

(f) $f(x,y)=\frac{\sin x}{1+x+y}$, $k=2$, $p=(0,0)$.

(h) $f(x,y)=\frac{y^2}{x^3}$, $k=2$, $p=(1,-1)$.

(j) $f(x,y)=\log(2+xy)$, $k=3$, $p=(0,0)$.

(l) $f(x,y,z)=\frac{1}{1+x+y+z}$, $k=3$, $p=(0,0,0)$.

Solució.

(a) Com que f és un polinomi de grau 3, tots els termes corresponents a graus superiors seran 0. A més,

$$f(x,y,z)=((x-1)+1)((y+1)-1)z=-z-(x-1)z+(y+1)z+(x-1)(y+1)z.$$

Per tant,

$$P_1(x,y,z)=-z,\quad P_2(x,y,z)=-z-(x-1)z+(y+1)z,\quad P_k(x,y,z)=f(x,y,z) \text{ si } k\geq 3.$$

(d) Observem que els polinomis de Taylor de grau 4 associats a e^x i $\cos y$, centrats a $x=0$ i $y=0$ respectivament, són

$$P_4(e^x,0,x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24},\quad P_4(\cos y,0,y)=1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}.$$

Per tant,

$$P_4(x,y)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{xy^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^2y^2}{4}+\frac{y^4}{24}.$$

(f) Notem en primer lloc que

$$P_2\Big(\frac{1}{1+t},0,t\Big)=1-t+t^2,\quad P_2(\sin x,0,x)=x.$$

Tenim doncs que

$$P_4(x,y)=x-x^2-xy.$$

(h) En aquest cas,

$$f(x,y)=\frac{((y+1)-1)^2}{((x-1)+1)^3}=\frac{1-2(y+1)+(y+1)^2}{1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}.$$

Tenim que

$$P_2\Big(\frac{1}{1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3},1,x\Big)=1-3(x-1)+6(x-1)^2,$$

i per tant

$$P_2(x,y)=1-3(x-1)-2(y+1)+6(x-1)^2+(y+1)^2+6(x-1)(y+1).$$

j) Noti's que $\log(2+xy)=\log(2)+\log(1+xy/2)$ i a més

$$P_3(\log(1+t),0,t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}.$$

Llavors,

$$P_3(x,y)=\log(2)+xy/2.$$

(l) Procedint com a l'apartat (f), però fent servir ara que

$$P_3\Big(\frac{1}{1+t},0,t\Big)=1-t+t^2-t^3,$$

es té que

$$P_3(x,y,z)=1-x-y-z+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$-x^3-y^3-z^3-3x^2y-3xy^2-3y^2z-3yz^2-3z^2x-3zx^2-6xyz.$$

Problema 2. Siguin $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ i $a\in\mathbb{R}$. Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 a l'origen de la funció $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ definida per

$$f(x_1,\dots,x_m)=\phi(e^{a\sum_{i=1}^m x_i}).$$

Solució. Comencem calculant les diferents quantitats que necessitem. En primer lloc,

$$f(0,\dots,0)=\phi(1).$$

Per altra banda, fent servir la regla de la cadena ja que les funcions que hi intervenen són diferenciables, es té que les derivades primeres s'expressen com

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=a\cdot\phi'(e^{a\sum_{i=1}^m x_i})\cdot e^{a\sum_{i=1}^m x_i},$$

i en particular $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0)=a\cdot\phi'(1)$. De la mateixa manera,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=a^2\cdot\phi''(e^{a\sum_{i=1}^m x_i})\cdot e^{2a\sum_{i=1}^m x_i}+a^2\cdot\phi'(e^{a\sum_{i=1}^m x_i})\cdot e^{a\sum_{i=1}^m x_i}$$

i aleshores $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0,\dots,0) = a^2(\phi''(1)+\phi'(1))$. Finalment, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j x_k}$ és

$$a^3 \cdot \phi'''(e^{a\sum_{i=1}^m x_i}) \cdot e^{3a\sum_{i=1}^m x_i} + 3a^3 \cdot \phi''(e^{a\sum_{i=1}^m x_i}) \cdot e^{2a\sum_{i=1}^m x_i} + a^3 \cdot \phi'(e^{a\sum_{i=1}^m x_i}) \cdot e^{a\sum_{i=1}^m x_i}$$

i per tant $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j x_k}(0,\dots,0) = a^3(\phi'''(1)+3\phi''(1)+\phi'(1))$. Es conclou que $P_3(f,0,x)$ és

$$\phi(1) + a\phi'(1)\sum_{i=1}^m x_i + \frac{a^2}{2}(\phi'(1)+\phi''(1))\sum_{i,j=1}^m x_i x_j + \frac{a^3}{6}(\phi'''(1)+3\phi''(1)+\phi'(1))\sum_{i,j,k=1}^m x_i x_j x_k.$$

Problema 3. Feu servir el polinomi de Taylor de grau 2 de $f(x,y) = e^x + e^y$ a $(0,0)$ per donar un valor aproximat de $f(0{,}2,-0{,}1)$. Doneu també una fita superior de l'error comès amb aquesta aproximació.

Solució. El polinomi de Taylor és

$$P_2(f,(0,0),x,y) = 2 + x + y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Avaluant a $x = 0{,}2$ i $y = -0{,}1$ obtenim que

$$f(0{,}2,-0{,}1) \simeq 2 + 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}005 = 2{,}125.$$

Una fita de l'error està donada per la fórmula del residu

$$R_2((0{,}2,-0{,}1),(0,0)) = \frac{e^{x_0}\cdot 0{,}2^3}{6} + \frac{e^{y_0}\cdot(-0{,}1)^3}{6},$$

on $x_0 \in [0,\ 0{,}2]$ i $y_0 \in [-0{,}1,\ 0]$ (de fet, (x_0,y_0) pertany al segment que connecta els punts $(0,0)$ i $(0{,}2,-0{,}1)$). En aquest cas, podem fitar $|e^{x_0}|$, $|e^{y_0}| < 2$ i per la desigualtat triangular

$$|R_2((0{,}2,-0{,}1),(0,0))| < \frac{2\cdot 0{,}008}{6} + \frac{2\cdot 0{,}001}{6} = 0{,}003.$$

Problema 4. Usant només polinomis de Taylor de funcions d'una variable, calculeu el polinomi de Taylor de grau ≤ 6 en el punt $(0,0)$ de la funció

$$f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{1-(y+x^2)}.$$

Solució. Només cal recordar que

$$P_6(\cos(t)-1,0,t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}, \quad P_6\Big(\frac{1}{1-t},0,t\Big) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6.$$

Per tant, el polinomi demanat és el corresponent a agafar els termes fins a ordre 6 de

$$-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\cdot(1+(x^2+y)+(x^2+y)^2).$$

Noti's que al primer factor ja no hem considerar els termes de grau 8, i al segon només s'ha considerat fins a grau 2 (els termes de grau 3 i superior, quan fem el producte amb un factor de grau 4, donen polinomis de grau 7 i superior). Per tant, s'obté

$$-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\cdot(1+y+x^2+y^2),$$

i desenvolupant es conclou que

$$P_6(x,y) = -\frac{x^4}{2} - x^2y^2 - \frac{y^4}{2} - \frac{x^4y}{2} - x^2y^3 - \frac{y^5}{2} - \frac{x^6}{2} - \frac{3x^4y^2}{2} - \frac{3x^2y^4}{2} - \frac{y^6}{2}.$$

Problema 5. Sigui $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **una funció de classe** $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ **satisfent** $g(0,1) = 0$**,** $Jg(0,1) = (2\ -3)$ **i**

$$Hg(0,1) = \begin{pmatrix} 3/4 & 5/4 \\ 5/4 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$ **amb** $f(0) = 1$ **i** $f'(0) = -1/8$**. Calculeu el polinomi de Taylor de grau** ≤ 2**, en el punt** $(0,1)$**, de la funció**

$$F(x,y) = \log(1 + x^2 + xy + y^2) + \int_0^{g(x,y)} f(t)\,dt.$$

Solució. Fem primer la part del logaritme:

$$\log(1 + x^2 + x((y-1)+1) + ((y-1)+1)^2) = \log(2 + x + 2(y-1) + x^2 + x(y-1) + (y-1)^2).$$

El polinomi de Taylor de grau ≤ 2 és per tant

$$\log(2) + \frac{x}{2} + (y-1) + \frac{x^2}{2} + \frac{x(y-1)}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{x(y-1)}{2}.$$

Pel que fa la part de la integral, considerem la funció

$$I(x,y) = \int_0^{g(x,y)} f(t)\,dt.$$

com que $g(0,1) = 0$, el terme constant és zero, $I(0,1) = 0$. Com que f és de classe $\mathcal{C}^1$, la regla de Leibnitz ens permet trobar les parcials de I, i obtenim que

$$\frac{\partial I}{\partial x} = f(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial I}{\partial y} = f(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}.$$

D'aquí es té que $\frac{\partial I}{\partial x} = 2$ i $\frac{\partial I}{\partial x} = -3$. Pel que fa les derivades segones, com que g és de classe $\mathcal{C}^2$ tenim que

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = f'(g(x,y)) \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + f(g(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + f(g(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

i

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = f'(g(x,y)) \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 + f(g(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Per tant, $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = 2$ i $\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{1}{8}$. Es conclou que el polinomi de Taylor de I és

$$P_2(I,(0,1),x,y) = 2x - 3(y-1) + \frac{x^2}{8} + 2x(y-1) + \frac{(y-1)^2}{16}.$$

Per tant, el polinomi de Taylor demanat serà

$$P_2(F,(0,1),x,y) = \log(2) + \frac{5x}{2} - 2(y-1) + \frac{x^2}{2} + 2x(y-1) + \frac{(y-1)^2}{16}.$$

Problemes sobre extrems condicionats

Els problemes 1-5 comencen l'estudi d'extrems sobre subvarietats de $\mathbb{R}^n$, mitjançant multiplicadors de Lagrange. Us recomanem repassar els conceptes de subvarietat i espai tangent, ja que estaran presents tot el temps en aquest tema.

Si $f : M \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció, direm que f té un extrem condicionat (relatiu o absolut) en $x_0 \in M$ si i només si $f|_M$ té un extrem (relatiu o absolut) en x_0.
Comencem per recordar el teorema dels multiplicadors de Lagrange: si f és diferenciable i té un extrem condicionat en $x_0 \in M$, aleshores existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \ldots \lambda_{n-d} \nabla g_{n-d}(x_0),$$

on $(g_1, \ldots, g_{n-d})$ són les funcions que defineixen de forma implícita la subvarietat mitjançant les equacions $g_1 = 0, \ldots, g_{n-d} = 0$.
En general, quan es volen trobar els extrems de la funció $f(x)$ sobre la subvarietat definida per $g_1 = 0, \ldots, g_{n-d} = 0$, s'acostuma definir la funció

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_{n-d} g_{n-d}(x).$$

En aquest cas, els candidats a extrems són punts crítics de $F(x)$.
Si les funcions són de classe $\mathcal{C}^2$ en un entorn d'un punt crític x_0 i HF_{x_0} és la hessiana de $F(x)$ a x_0, es té que: (a) si HF_{x_0} és definida negativa sobre l'espai tangent de la subvarietat, aleshores $f|_M$ té un màxim local (condicionat); (b) si HF_{x_0} és definida positiva sobre l'espai tangent de la subvarietat, aleshores $f|_M$ té un mínim local (condicionat). Noti's que no es demana que la hessiana sigui definida negativa (resp. definida positiva), només que la seva restricció a un subespai ho sigui!
Observació: quan la varietat està donada en forma implícita mitjançant equacions

$$g_1 = 0, \ldots, g_{n-d} = 0,$$

el subespai tangent a la varietat en un punt es calcula com el nucli de la jacobiana de $G = (g_1, \ldots, g_{n-d})$ al punt.

Abans de començar amb la resolució dels problemes, un petit recordatori de cara a l'examen. Aquí, en alguns casos (sobre tot quan hem treballat problemes semblants abans), no donem tots els detalls que caldrien i abusem de frases com "aquesta funció és clarament contínua", o "aquest conjunt és compacte". De cara a l'examen, cal que justifiqueu sempre afirmacions d'aquest tipus (com fem aquí per exemple als primers apartats).

Problema 1 (alguns apartats). Trobeu els extrems absoluts de f quan les variables estan sotmeses als lligams que s'indiquen:

(a) $f(x, y) = x$; $x^2 + 2y^2 = 3$.

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$; $2x + 3y = 0$.

(f) $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

Solució.

(a) Considerem la funció de Lagrange

$$F(x, y) = x + \lambda(x^2 + 2y^2 - 3),$$

que és derivable (de fet de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre tota la regió, ja que és una funció polinòmica. Per trobar els extrems s'ha d'imposar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda \cdot 2x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda \cdot 4y = 0, \quad x^2 + 2y^2 - 3 = 0.$$

A partir de $4\lambda y = 0$ hi ha dues possibilitats. Si $\lambda = 0$ s'arriba a una contradicció perquè llavors no pot passar que $1 + \lambda \cdot 2x = 0$. Tenim doncs que $y = 0$ i per tant de la darrera equació es té que $x = \pm\sqrt{3}$ (i això ens determina el valor de λ, que per $x = \sqrt{3}$ és $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ i per $x = -\sqrt{3}$ és $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}$). Per tant, els candidats a extrems absolut condicionat són $(\sqrt{3}, 0)$ i $(-\sqrt{3}, 0)$.

Ara hi ha dues maneres de finalitzar. La primera farà servir un argument de compacitat, veient primer que $x^2 + 2y^2 = 3$ és un compacte. Per una banda, és un tancat, ja que és la antiimagte del tancat $\{3\}$ per la funció

$$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2,$$

que és contínua per ser un polinomi; per altra banda, és fitat ja que $x^2 \leq x^2 + 2y^2 = 3$ i $2y^2 \leq x^2 + 2y^2 = 3$, i per tant $x^2 + y^2 \leq 3 + 3/2$ i el conjunt està contingut per exemple en la bola de centre 0 radi $\sqrt{5}$. A més, $f(x, y) = x$ és una funció contínua ja que es tracta d'un polinomi. Aleshores, f ha d'assolir un mínim i un màxim sobre $x^2 + 2y^2 = 3$, i tots dos es trobaran entre els candidats a extrems (els punts crítics). Com que $f(\sqrt{3}, 0) = \sqrt{3}$ i $f(-\sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}$, el primer ha de ser el màxim absolut i el segon el mínim absolut.

Alternativament, hom pot trobar els espais tangents corresponents i estudiar la matriu hessiana restringida a aquests espais. L'espai tangent al punt $(\sqrt{3}, 0)$ és el generat pel vector $(0, 1)$, i al punt $(-\sqrt{3}, 0)$ és també el generat pel vector $(0, 1)$. El procediment que se segueix per trobar-ho quan es treballa amb varietats donades en forma implícita, és a dir, mitjançant equacions del tipus $g_1 = 0, \ldots, g_{n-d} = 0$, és calcular el nucli de la jacobiana de $G = (g_1, \ldots, g_{n-d})$. En aquest cas, $n = 2$, $d = 1$ i $g_1 = x^2 + 2y^2 - 3$. Per tant, és suficient trobar el nucli de

$$\begin{pmatrix} 2x & 4y \end{pmatrix},$$

i com que pels dos punts crítics que estem estudiant $y = 0$, el resultat que hem trobat és immediat.

La hessiana de F està donada per

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix},$$

i aleshores la forma quadràtica associada serà

$$HF_{(x,y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot (2h_1^2 + 4h_2^2).$$

Es conclou doncs que al punt $(\sqrt{3}, 0)$ la hessiana restringida a la subvarietat és

$$HF_{(\sqrt{3},0)}(0, h_2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 4h_2^2,$$

que és definida negativa i per tant el punt és un màxim local condicionat a la lligadura $x^2 + 2y^2 = 3$. En canvi, al punt $(-\sqrt{3}, 0)$ la hessiana restringida a la subvarietat és

$$HF_{(-\sqrt{3},0)}(0, h_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 4h_2^2,$$

que és definida positiva i per tant el punt és un mínim local condicionat a la lligadura. Com que aquí no hi ha vora, el mínim i el màxim local són de fet mínim i màxim absolut condicionat, respectivament.

(d) Considerem la funció de Lagrange

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 + \lambda(2x + 3y),$$

que és de classe $\mathcal{C}^\infty$ (per ser una funció polinòmica) sobre tota la regió (noti's que ara ja no tenim un compacte). Per trobar els extrems s'ha d'imposar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 3\lambda = 0, \quad 2x + 3y = 0.$$

Això és un sistema lineal que té com a única solució $x = y = 0$ i $\lambda = 0$.

Es pot raonar directament que $f(x, y) \geq 1$ amb igualtat si i només si $(x, y) = (0, 0)$ i per tant el punt trobat és un mínim de la funció, però anem a fer el procediment habitual i sistemàtic. L'espai tangent a la subvarietat al punt $(0, 0)$ és el nucli de la jacobiana de $2x + 3y$, és a dir, el nucli de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},$$

i això es correspon amb el generat pel vector $(-3, 2)$. A més, per trobar la forma quadràtica associada a la hessiana de F considerem

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

i s'obté que

$$HF_{(0,0)}(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_2^2.$$

Aquesta forma quadràtica és definida positiva (hi hauria prou amb que fos definida positiva restringida a l'espai tangent). En qualsevol cas, el punt és un mínim local condicionat a la lligadura $2x + 3y = 0$, i per argumentar que és absolut sí que cal fer servir l'argument anterior de dir que la funció sempre és més gran o igual que 1 amb igualtat si i només si $(x, y) = (0, 0)$.

La funció no està fitada superiorment a la regió (prenem el punt $(-3\lambda, 2\lambda)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari, i el valor és $13\lambda^2 + 1$), la qual cosa no és cap contradicció ja que el conjunt no és compacte. En particular, com que no hi ha cap màxim local no pot existir un màxim absolut.

(f) Considerem la funció de Lagrange

$$F(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x^2 - y^2 - 1) + \mu(2x + z - 1),$$

que és $\mathcal{C}^\infty$ sobre tota la regió (és una expressió polinòmica). Per trobar els extrems s'ha d'imposar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x + 2\mu = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \mu = 0,$$

i a més $x^2 - y^2 = 1$ i $2x + z = 1$. Per tant, $\mu = -1$ i es té simultàniament que

$$2\lambda x = 1, \quad 2\lambda y = 1, \quad x^2 - y^2 = 1.$$

Per tant, $4\lambda^2(x^2 - y^2) = 1 - 1 = 0$. Això vol dir que $\lambda = 0$ ja que $x^2 - y^2 = 1$, però això no pot passar ja que $2\lambda x = 1$. Per tant, la funció no té cap extrem relatiu condicionat i per tant tampoc no pot tenir cap extrem absolut condicionat.

Problema 3. Trobeu la distància entre el punt $(0, b)$ i la paràbola $x^2 - 4y = 0$. Resoleu el problema emprant dos mètodes diferents.

Solució. En primer lloc, noti's que pel problema 17(c) del Tema 1, la distància entre un punt i un tancat sempre s'assoleix (és a dir, hi ha un punt al tancat que dona l'ínfim). Un punt qualsevol de la paràbola està parametritzat per $(2\lambda, \lambda^2)$. La distància al quadrat al punt $(0, b)$ està donada per

$$f(\lambda) = 4\lambda^2 + (\lambda^2 - b)^2 = \lambda^4 + (4 - 2b)\lambda^2 + b^2,$$

que és una funció polinòmica i per tant de classe $\mathcal{C}^\infty$. És important observar que és equivalent minimitzar la distància que la distància al quadrat, ja que la distància només pren valors positius i aleshores si $0 \leq \alpha \leq \beta$, també es té que $0 \leq \alpha^2 \leq \beta^2$ (i de la mateixa manera si les desigualtats són estrictes). És millor treballar amb la distància al quadrat, ja que d'aquesta manera evitem fer servir arrels quadrades, que de vegades donen problemes de diferenciabilitat.
Derivant i igualant a zero, es té que

$$4\lambda^3 + 4(2-b)\lambda = 4\lambda(\lambda^2 + (2-b)) = 0.$$

Si $b < 2$, l'única solució és $\lambda = 0$. Com que $f''(\lambda) = 12\lambda^2 + 4(2-b) > 0$, el punt és en efecte un mínim condicionat (i per ser l'únic, és el que dona la distància). En aquest cas doncs la distància és b.
Si $b > 2$, les solucions són $\lambda = 0$, $\sqrt{b-2}$, $-\sqrt{b-2}$. En aquest cas, $f''(0) < 0$, $f''(\sqrt{b-2}) > 0$ i $f''(-\sqrt{b-2}) > 0$. Per tant, els possibles mínims es troben entre els mínims locals, que són $-\sqrt{b-2}$ i $\sqrt{b-2}$. En tots dos casos, la distància és

$$\sqrt{4(b-2)+4} = \sqrt{4b-4} = 2\sqrt{b-1}.$$

Per últim, observem que quan $b = 2$ l'única solució és $\lambda = 0$. La funció és $f(\lambda) = \lambda^4 + 4$, i està clar que $\lambda = 0$ és un mínim local.

Un procediment alternatiu és emprant multiplicadors de Lagrange. Agafem un punt genèric de la paràbola (x, y) i agafem

$$F(x, y) = x^2 + (y-b)^2 + \lambda(x^2 - 4y).$$

Derivant i igualant a 0,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot 2x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-b) - 4\lambda = 0, \quad x^2 - 4y = 0.$$

Hi ha dues opcions: si $x = 0$ es té el punt $(0, 0)$ i $\lambda = -b/2$; aquesta és de fet l'única possibilitat quan $b < 2$. Altrament, tenim que també pot passar que $\lambda = -1$, $y = b - 2$ i $x = \pm 2\sqrt{b-2}$, i es conclou amb una discussió com la precedent comparant el valor de la funció f als tres punts candidats a assolir el mínim condicionat a la lligadura (també podem analitzar la hessiana restringida a l'espai tangent a la subvarietat: si $b < 2$, tenim que l'únic punt possible satisfà que la hessiana és definida positiva, i per tant és un mínim; en l'altre cas, s'analitzen els tres casos i tenim dos possibles mínims on la restricció de la hessiana és definida positiva).

Problema 4. Trobeu la distància mínima entre les corbes d'equació $x + y = 4$ i $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solució. Com que $x^2 + 4y^2 = 4$ és compacte i $x + y = 4$, sabem pels apartats (b) i (c) del problema 17 del Tema 1 que hi ha punts a la recta i a l'el·lipse pels quals la distància s'assoleix. Considerem doncs la distància al quadrat, ja que per l'apartat anterior sabem que és equivalent minimitzar la distància que la distància al quadrat:

$$F(x, y, z, t) = (x-z)^2 + (y-t)^2 + \lambda(x + y - 4) + \mu(z^2 + 4t^2 - 4).$$

Llavors, les parcials

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-z) + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-t) + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2(x-z) + 2\mu z, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -2(y-t) + 8\mu t$$

s'han d'igualar a zero, i a més $x + y = 4$ i $z^2 + 4t^2 = 4$. Tenim doncs un sistema de 6 equacions amb 6 incògnites. Podem expressar de forma immediata (y, z, t) en termes de x i λ, com

$$y = 4 - x, \quad z = x + \lambda/2, \quad t = 4 - x + \lambda/2.$$

Agafant $\frac{\partial F}{\partial z}$ i $\frac{\partial F}{\partial t}$ tenim que

$$\lambda + 2\mu z = 0, \quad \lambda + 8\mu t = 0.$$

Aleshores, o bé $\lambda = \mu = 0$, o bé $z - 4t = 0$.

- Si $\lambda = \mu = 0$, tenim que $\lambda = 0$, $z = x$ i $y = t = 4 - x$. Imposant

$$z^2 + 4t^2 = x^2 + 4(4-x)^2 = 5x^2 - 32x + 64 = 4,$$

ens queda que $5x^2 - 32x + 60 = 0$ no té solucions.

- Si $z - 4t = 0$, i al mateix temps $z^2 + 4t^2 = 4$, es té que $t = \pm 1/\sqrt{5}$ i $z = \pm 4/\sqrt{5}$. Com que $x = (z - t + 4)/2$, en el primer cas $(x, y, z, t) = (2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}), 4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ i en el segon $(x, y, z, t) = (2 - 3/(2\sqrt{5}), 2 + 3/(2\sqrt{5}), -4/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

  Noti's que la forma quadràtica associada a la hessiana es troba mitjançant el producte

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2+2\mu & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2+2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix},$$

  i s'obté que

$$\begin{aligned} HF_{x,y,z,t}(h_1, h_2, h_3, h_4) &= 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + 2h_4^4 - 4h_1h_3 - 4h_2h_4 + 2\mu(h_3^2 + 4h_4^2) \\ &= 2(h_1 - h_3)^2 + 2(h_2 - h_4)^2 + 2\mu(h_3^2 + 4h_4^2). \end{aligned}$$

  Observem que $\mu = -\frac{\lambda}{2z} = -\frac{z+t-4}{2z}$.

  L'espai tangent és el nucli de la jacobiana de $(x + y - 4, z^2 + 4t^2 - 4)$, és a dir, el nucli de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 8t \end{pmatrix},$$

  que aquí, un cop es substitueixen els valors de z i t, en tots dos casos dona l'espai generat per $(1, -1, 0, 0)$ i per $(0, 0, 1, -1)$. En termes d'equacions, si anomenem (h_1, h_2, h_3, h_4) les variables, aquest és el sistema donat per $h_1 + h_2 = 0$ i $h_3 + h_4 = 0$ Per tant, la restricció de la hessiana a l'espai tangent s'obté canviant $h_2 = -h_1$ i $h_4 = -h_3$, de manera que ens queda una forma quadràtica en dues variables, que és la dimensió de l'espai tangent:

$$HF_{x,y,z,t}(h_1, -h_1, h_3, -h_3) = 4(h_1 - h_3)^2 + 10\mu h_3^2.$$

  En el primer cas, $\mu > 0$ i per tant la hessiana és definida positiva (suma de quadrats) i tenim un mínim local condicionat, que per ser l'únic és també el mínim absolut condicionat per la lligadura (ja vam dir que per la geometria del problema ha d'existir!). En el segon, $\mu < 0$ i la matriu no és ni definida positiva ni definida negativa ja que té un valor propi positiu i altre negatiu (és doncs un punt de sella).

La distància és $2\sqrt{2} - \sqrt{5/2}$ i s'assoleix als punts $(2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}))$ (sobre la recta) i $(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ (sobre la paràbola).

Problema 5. Trobeu els vèrtexs i semieixos de l'el·lipse obtinguda intersecant el pla d'equació $x + y + z = 0$ amb l'el·lipsoide d'equació

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Solució. El resultat de tallar l'el·lipsoide amb el pla é l'el·lipse donada per

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = \frac{5}{4}x^2 + 2xy + 2y^2 = 1.$$

Com que és el resultat de tallar l'el·lipsoide amb un hiperplà que passa pel seu centre, sabem que el centre de l'el·lipse és el $(0, 0)$. Alternativament això es pot veure mitjançant l'equació. S'ha de trobar ara el punt més llunyà i el més proper al centre.

Per a això, es considera

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + (-x-y)^2 + \lambda\Big(\frac{5}{4}x^2 + 2xy + 2y^2 - 1\Big).$$

Derivant, resulta que

$$4x + 2y + \lambda(5/2x + 2y) = 0, \quad 2x + 4y + \lambda(2x + 4y) = 0.$$

En forma matricial, això s'expressa com

$$\begin{pmatrix} 4+5\lambda/2 & 2+2\lambda \\ 2+2\lambda & 4+4\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El punt $(x,y) = (0,0)$ no és al conjunt, per tant hem d'imposar que el determinant sigui zero

$$6\lambda^2 + 18\lambda + 12 = 6(\lambda+1)(\lambda+2).$$

- Si $\lambda = -1$, passa que $x = 0$ i $y = \pm 1/\sqrt{2}$.
- Si $\lambda = -2$, passa que $x = -2y$. Impossant la condició

  $$\frac{5}{4} \cdot 4y^2 - 4y^2 + 2y^2 = 3y^2 = 1,$$

  surt que $y = \pm 1/\sqrt{3}$ i $x = \mp 2/\sqrt{3}$.

Ara tenim dues possibilitats per estudiar el caràcter dels punts candidats a extrems que s'han trobat. Com que l'el·lipse és un compacte, la funció distància és contínua i per tant assoleix un màxim i un mínim. Els punts $(0, \pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ es troben a distància 1 del centre, i en canvi $(\pm 2/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$ estan a una distància $\sqrt{2}$. Per tant, pels dos primers s'assoleix el mínim i pels dos darrers el màxim. Tots quatre són els vèrtexs, i els semieixos tenen mida 1 i $\sqrt{2}$.
Alternativament, es pot raonar el caràcter dels punts mirant la restricció de la hessiana a la subvarietat.

Problema 2. Determineu els extrems absoluts de les següents funcions f sobre els recintes K que s'especifiquen:

(a) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$**,** $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ **amb** $x,y,z \geq 0$, $x+y+z \leq \pi/2\}$**.**

(b) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^3 + 3y^2$**,** $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **amb** $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1\}$**.**

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y + x$**,** $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **amb** $x + y \geq -3$, $x \leq y$, $y \leq 0\}$**.**

Solució. En tots tres casos, els recintes són compactes: com que les condicions estan donades per desigualtats amb funcions contínues són fitats i el fet d'estar fitats és gairebé immediat en tots tres casos (però cal fer-ho!). Les tres funcions són també contínues, ja que són sumes i productes de funcions polinòmiques o trigonomètriques. Per tant, sempre podem garantir l'existència de màxims i mínims, ja que les funcions contínues assoleixen el mínim i el màxim sobre conjunts compactes.

(a) A l'interior del recinte, per trobar els punts crítics hem d'agafar les parcials i igualar a zero. Com que queda

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \sin x \sin y \cos z,$$

està clar que no hi haurà extrems a l'interior. A la frontera, si una de les variables (posem x sense pèrdua de generalitat) val 0 llavors la funció és 0. Analitzem doncs ara què passa quan $x + y + z = \pi/2$. Es considera doncs

$$F(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z + \lambda(x + y + z - \pi/2).$$

Prenent les parcials,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \sin x \sin y \cos z + \lambda,$$

es té que la condició que siguin 0 si cap de les tres variables és 0 vol dir que

$$\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z,$$

i això implica que

$$\tan x = \tan y = \tan z,$$

i per ser la funció tangent injectiva a $(0, \pi/2)$, si fem servir la condició $x + y + z = \pi/2$ es té que $x = y = z = \pi/6$, i per tant el màxim condicionat es dona en aquest cas i és $1/8$.

(b) A l'interior del recinte la condició és

$$4x^3 + 4xy - 3x^2 = 0, \quad 2x^2 + 6y = 0.$$

Per tant,

$$4x^3 + 4x(-x^2/3) - 3x^2 = x^2(8/3x - 3) = 0.$$

Si $x = y = 0$ tenim un punt crític a l'interior on la funció val 0. Mirem ara a la vora.

- Si $x = 1$, aleshores $f(1, y) = 2y + 3y^2$. La condició de punt crític per $y \in (-1, 1)$ és $2 + 6y = 0$, és a dir $y = -1/3$, i $f(1, -1/3) = -1/3$. Si $y = 1$, $f(1, 1) = 5$. Si $y = -1$, $f(1, -1) = 1$.
- Si $x = -1$, aleshores $f(-1, y) = 2 + 2y + 3y^2$. La condició de punt crític és la mateixa i tenim que $f(-1, -1/3) = 5/3$. De la mateixa manera, $f(-1, 1) = 7$ i $f(-1, -1) = 3$.
- Si $y = 1$, aleshores $f(x, 1) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3$, i la condició de punt crític és $4x^3 - 3x^2 + 4x = x(4x^2 - 3x + 4) = 0$, que té per única solució real $x = 0$. En aquest cas, $f(0, 1) = 3$. Noti's també que $f(1, 1) = 5$ i $f(-1, 1) = 7$.
- Si $y = -1$, aleshores $f(x, -1) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$, i la condició de punt crític és $4x^3 - 3x^2 - 4x = x(4x^2 - 3x - 4) = 0$. L'equació té dues arrels amb $|x| < 1$: una és $x = 0$, per la qual $f(0, -1) = 3$, i l'altra $x_a = (3 - \sqrt{73})/8$. És immediat que $-1/3 < f(x_a, -1) < 7$.

El mínim absolut sobre el compacte és per tant $-1/3$ i el màxim 7.

(c) La regió és el triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(-3, 0)$ i $(-3/2, -3/2)$. La condició de punt crític a l'interior és

$$2x - y + 1 = 0, \quad 2y - x + 1 = 0,$$

que vol dir $x = y = -1$. Aquest punt no és a l'interior del triangle, i hem d'analitzar què passa a cada costat.

- Si $y = 0$ tenim $f(x, y) = x^2 + x$, amb $y \in [-3, 0]$. Hi ha un punt crític a $(-1/2, 0)$, on la funció val $-1/4$ i als extrems es té $f(-3, 0) = 6$ i $f(0, 0) = 0$.
- Si $x = y$, hem de mirar $f(\lambda, \lambda)$, on $\lambda \in [-3/2, 0]$. En aquest cas, $f(x, y) = \lambda^2 + 2\lambda$. Hi ha un punt crític a $(-1, -1)$, on la funció val -1, i al vèrtex $(-3/2, -3/2)$ val $-3/4$.
- Si $x + y = -3$, hem de mirar $f(\lambda, -3 - \lambda)$, on $\lambda \in [-3, -3/2]$. En aquest cas,

  $$f(x, y) = \lambda^2 + 3\lambda + 6,$$

  i la condició de punt crític és $2\lambda + 3 = 0$, i $\lambda = -3/2$ cau al vèrtex (ja hem analitzat aquest punt).

El mínim absolut sobre el compacte és per tant -1 i el màxim 6.