UNA APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Cálculo en una variable

Óscar Rivero Salgado

Las técnicas que hemos desarrollado hasta el momento las podemos aplicar en diferentes contextos. Vamos a comenzar por calcular las integrales de potencias arbitrarias de funciones trigonométricas elementales. Por ejemplo, para hallar

$$C_n = \int \cos^n x \, dx$$

podemos hacer integración por partes. Llamamos $u = \cos^{n-1} x$ y $v = \sin x$, de forma que nos queda que

$$C_n = \cos^{n-1} \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} \sin^2 x \, dx = \cos^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n.$$

Por consiguiente

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}.$$

De la misma manera, si

$$S_n = \int \sin^n x \, dx,$$

utilizando el mismo procedimiento obtenemos que

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}.$$

Finalmente, en el caso de la tangente

$$T_n = \int \tan^n x \, dx,$$

tendremos que

$$T_n = \int \tan^{n-2} x (\tan^2 x + 1) \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - T_{n-2}.$$

Estos métodos los podemos aplicar al caso de integrales definidas. Consideremos la sucesión (ahora ya de números reales, y no de funciones) definida por $s_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$. Por lo visto hasta ahora, podemos formar una recurrencia dada por

$$s_0 = \pi/2, \quad s_1 = 1, \quad s_n = \frac{n-1}{n} \cdot s_{n-2}.$$

De esta manera, por inducción se tiene que

$$s_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad s_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Combinando estas dos expresiones, nos queda que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión viene dado por

$$\frac{s_{2n}}{s_{2n+1}} = \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Por otra parte, como $0 \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$ para todo $0 \le x \le \pi/2$, haciendo la integral entre 0 y $\pi/2$ a cada lado de las desigualdades, resulta que $0 \le s_{2n+1} \le s_{2n} \le s_{2n-1}$ y de aquí

$$1 \le \frac{s_{2n}}{s_{2n+1}} \le \frac{s_{2n-1}}{s_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Aplicando el teorema de compresión, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{2n}}{s_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)\frac{(2n+1)\pi}{2} = 1.$$

Alternativamente, invirtiendo la expresión, aislando el factor $\pi/2$ y tomando raíces cuadradas,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Multiplicando ahora numerador y denominador por $\sqrt{2n+1}$ y usando luego que el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Observación. Aunque no es necesario estrictamente para el problema, podemos probar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

A priori únicamente sabemos que s_n tiene límite por ser una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0. Tomemos por ejemplo $a = \frac{4M-1}{4M} \cdot \frac{\pi}{2}$, donde M es un entero positivo fijado. Claramente existe un entero positivo N de manera que $\sin^N a < \frac{1}{4M}$ y como el seno es creciente en el intervalo a considerar, también sucede que $\sin^N x < \frac{1}{n}$ para todo $0 \le x \le a$. Por otro lado $\sin^N x < 1$ para todo $a \le x \le \pi/2$. Por consiguiente, para todo $n \ge N$,

$$\begin{aligned} s_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{a} \sin^n x\, dx + \int_a^{\pi/2} \sin^n x\, dx \\ &< \frac{\pi}{2}\Big(\frac{4M-1}{16M^2} + \frac{1}{4M}\Big) < 2 \cdot \Big(\frac{4}{16M} + \frac{1}{4M}\Big) = \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

Es decir, una vez fijamos M, existirá un entero positivo N de forma que para todo $n > N$ se cumple que $0 < s_n < 1/M$, probando así que la sucesión tiende a cero.

Ejercicio. Repetir el cálculo anterior para el caso de la tangente, que usaremos en nuestra próxima aplicación.

Podemos aplicar el mismo procedimiento iterativo que usamos con el seno para la tangente, utilizando las fórmulas iterativas que hemos deducido. Ahora fijaremos el extremo superior a $\pi/4$. Sea $t_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x\, dx$. Entonces, usando los cálculos anteriores,

$$t_n = \frac{1}{2n-1} - t_{n-1}.$$

Por otra parte, $t_1 = 1 - \pi/4$. De aquí nos queda que

$$t_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{3} + (-1)^{n-1} + (-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

Usando que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, obtenemos que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$